I GIOCHI MATEMATICI NEL MEDIOEVO

Raffaella Franci

raffaellafranci@alice.it

Ivrea 16 marzo 2013

Che cos’è un gioco matematico?

- Quesito la cui formulazione deve escludere il ricorso a un vocabolario matematico troppo specializzato e la cui soluzione deve richiedere l’uso di strumenti matematici elementari
- Il suo enunciato deve essere intrigante, sorprendere e porre una sfida per chi lo legge, deve suscitare curiosità e voglia di risolverlo

Un po' di storia

- Fin da quando la matematica è stata studiata e insegnata, cioè almeno da quattromila anni, i giochi matematici hanno costituito allo stesso tempo una parte integrante dell'educazione matematica e un passatempo per i non specialisti matematicamente dotati.
- Il modo più antico di trasmissione della matematica è quello della raccolta di problemi, spesso raggruppati per affinità di metodi risolutivi. Fin dai tempi più remoti, accanto a questioni di carattere più immediatamente applicativo ne furono proposte altre che non avevano alcun impiego nella realtà quotidiana e il cui scopo principale era dunque quello del puro esercizio intellettuale, alcuni di questi problemi sono stati proposti pressoché immutati per millenni.

- Nelle antiche raccolte i giochi matematici sono in generale mescolati con i problemi pratici, legati cioè alle necessità della vita quotidiana. Tuttavia in epoche successive furono composte raccolte destinate a collezionare solo materiale di questo genere. Forse la più antica di esse è quella in lingua greca contenuta nella cosiddetta ***Antologia Greca o Palatina*** (IV/V sec.). Autore della raccolta è un certo Metrodoro.
- Quasi completamente dedicata alla matematica ricreativa sono anche le ***Propositiones ad acuendos juvenes*** scritte, in latino, all'inizio del nono secolo da Alcuino maestro di Carlomagno.

- Durante tutto il Medioevo numerose questioni di matematica ricreativa si trovano nei trattati italiani di matematica mercantile, i **trattati d’abaco**. In questi testi i giochi matematici talora sono mescolati agli altri problemi, talaltra raccolti in opportuni capitoli. Alcuni autori giustificano la presenza di questo tipo di questioni con l’intento di distrarre i lettori dalle noiose e ripetitive applicazioni pratiche.
-

PROBLEMI DALLE *PROPOSITIONES AD ACUENDOS JUVENES*

di

Alcuino da York

Cenni biografici su Alcuino

- Alcuino(735-804) studiò presso la scuola di York (Inghilterra del Nord) all'epoca la più rinomata d'Europa e di cui divenne direttore
- Nel 781 fu chiamato da Carlomagno a dirigere la scuola di palazzo (***Schola Palatina***) e fu poi incaricato di organizzare l'istruzione in tutto il regno
- Era sostenitore dell'ordinamento degli studi secondo le *sette arti liberali:* grammatica, retorica e logica (*trivium)*, aritmetica, geometria, astronomia e musica *(quadrivium)*
- Scrisse molti testi didattici legati al suo insegnamento. Le *Propositiones* sono l'unico a carattere matematico che ci è pervenuto.

Propositiones ad acuendos juvenes

- Scritte all’incirca nell’800 d.C. rappresentano il più antico testo matematico medioevale oggi noto
- Sono una collezione di 53 problemi molti dei quali appartengono al genere oggi denominato ***matematica ricreativa***
- Vi sono problemi per la cui risoluzione si richiedono nozioni elementari di aritmetica e geometria altri che richiedono solo attenzione e ragionamento

12. Un padre e i suoi tre figli

- Un padre morendo lasciò in eredità ai suoi tre figli 30 ampolle di vetro, dieci delle quali erano piene d'olio, altre dieci riempite a metà, le terze dieci vuote. Divida, chi può, olio e ampolle in modo che ciascuno dei tre figli ottenga la stessa quantità sia di vetro che di olio.

Soluzione problema 12

- Tre sono dunque i figli e 30 le ampolle. Delle ampolle poi 10 sono piene, 10 mezze e 10 vuote. Moltiplica tre per dieci fanno 30. A ciascun figlio toccano in parte 10 ampolle. Dividi poi per tre, cioè da al primo figlio 10 ampolle piene a metà, e poi al secondo da 5 piene e 5 vuote e similmente darai al terzo figlio, e sarà una divisione equa tra i tre figli, tanto in olio quanto in vetro.

Commenti prob. 12

- *Il problema ha altre soluzioni oltre a quella presentata nel testo.*
- *Le soluzioni sono determinate dalla distribuzione delle ampolle piene.*
- *Quella del testo è la seguente (0,5,5).*
- *Le altre possibili sono (5,4,1), (5,3,2), (4,4,2), (4,3,3), dove i numeri della terna indicano le ampolle piene date rispettivamente al primo al secondo e al terzo figlio. David Singmaster ha generalizzato il problema considerando un qualunque numero intero N di ampolle di ogni tipo ed ha dimostrato che esso è equivalente a quello di trovare il numero di triangoli con lati interi e perimetro di lunghezza N.*

14. Un bue

- Un bue che ara tutto il giorno, quante impronte lascia nell'ultimo solco?
- *Soluzione.*
- Il bue non lascia assolutamente alcuna impronta nell'ultimo solco, perché egli stesso precede l'aratro e l'aratro lo segue. Infatti quante orme egli imprime nella terra incolta, tante egli successivamente ne cancella lavorando. Pertanto nell'ultimo solco non si troverà alcuna sua impronta.

17. Tre fratelli che avevano una sorella

- C'erano tre fratelli che avevano ciascuno una sorella e dovevano attraversare un fiume. Ciascuno di essi desiderava la sorella degli altri. Arrivati ad un fiume non trovarono altro che una piccola barca che poteva trasportare solo due di essi. Dica chi può in che modo attraversarono il fiume, in modo che nessuna di esse fosse oltraggiata.

Soluzione prob. 17

- In primo luogo io e mia sorella entrammo nella barca e ci trasferimmo dall’altra parte, attraversato il fiume feci scendere la sorella dalla barca e riportai la barca all'altra riva. Poi si imbarcarono le sorelle dei due uomini, cioè dei due che erano rimasti a riva. Quando quelle femmine furono sbarcate, mia sorella che aveva fatto la traversata per prima, mi riportò la barca. Una volta sbarcata entrarono nella barca i due fratelli e andarono sull’altra riva. Allora uno di essi con sua sorella entrò nella barca e ritornò da noi. Io poi e quello che aveva navigato attraversammo lasciando a terra la mia sorella. Raggiunta noi la riva, una delle due sorelle ricondusse la barca indietro e presa con sé mia sorella di nuovo venne da noi. E quello la cui sorella era rimasta di là entrò nella barca e la riportò con sé. E fu completata la traversata senza alcun disonore.

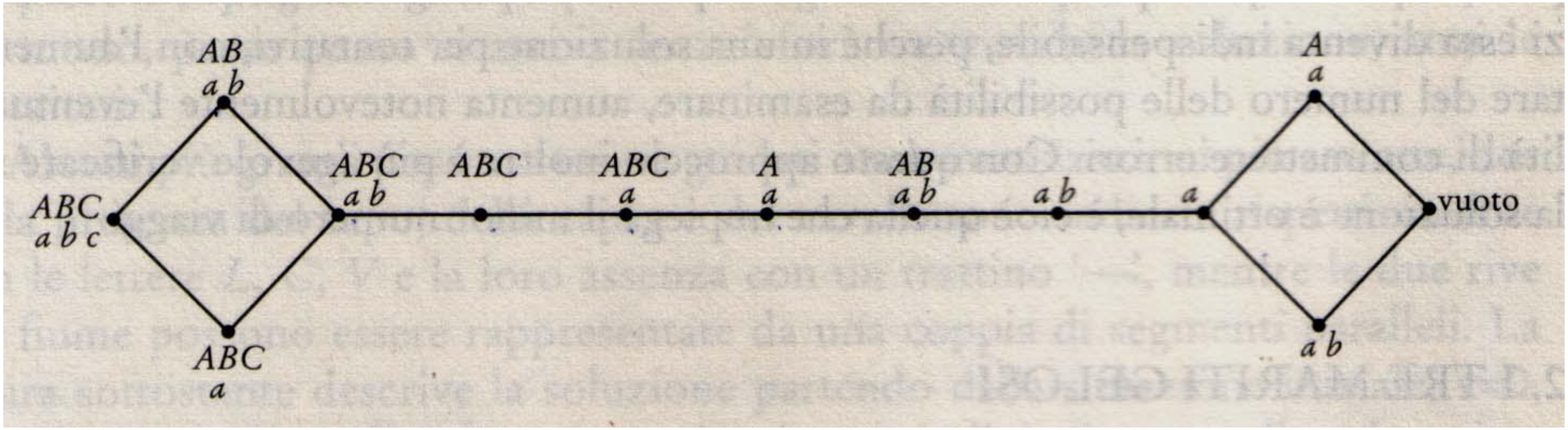
Commenti 1 prob. 17

- *Questo rompicapo e i tre che lo seguono sono denominati oggi "problemi di attraversamento", non se ne conoscono redazioni scritte precedenti a questa. Essi divennero in seguito molto noti ed entrarono a far parte di quasi tutte le raccolte di problemi dilettevoli e curiosi. Questo in particolare fu molto popolare nel Rinascimento con i protagonisti cambiati in "tre mogli e tre mariti gelosi"*

Commenti 2 prob.17

- Il problema ammette oltre a quella presentata da Alcuino altre tre soluzioni, le quattro soluzioni che richiedono tutte 11 viaggi, possono essere compendiate nel seguente schema dove i vertici rappresentano le situazioni possibili sulla prima riva e le lettere A, B, C indicano i fratelli, ed a, b, c le rispettive sorelle

Schema di soluzione prob.17



18. Il lupo la capra e il cavolo

- Un uomo doveva trasportare aldilà di un fiume un lupo, una capra e un cavolo e non potè trovare altra barca se non una che era in grado di portare soltanto due di essi. Gli era stato ordinato però di trasportare tutte queste cose di là senza alcun danno. Chi è in grado dica in che modo poté trasferirli indenni.

Soluzione prob.18

In modo analogo allora io dapprima porterei la capra e lascerei il lupo e il cavolo. Poi tornerei e trasferirei sull'altra riva il lupo e sbarcato questo e imbarcata di nuovo la capra ritornerei indietro, e lasciata la capra trasferirei di là il cavolo, e tornerei di nuovo indietro, e presa la capra la porterei sull'altra sponda. In questo modo, la traversata sarà tranquilla senza disastri che incombano.

19. Un uomo e la moglie che pesavano un plaustro

Un uomo e la moglie, ciascuno del peso di un plaustro,[1]con due figli pesanti insieme un plaustro, dovevano attraversare un fiume. Trovarono una barca che poteva portare solo il peso di un plaustro. Chi si ritiene in grado faccia il trasporto, in modo che la barca non affondi.

- [1] Il vocabolo latino *plaustrum* indica un carro da trasporto, ma viene usato anche per indicare il peso che il carro può trasportare.

Soluzione prob. 19

Ancora con il medesimo procedimento di prima. Dapprima entreranno i due fanciulli e traghetteranno e uno di essi riconduce la barca. Allora sale la madre e traghetta. Poi il figlio riporta la barca. Una volta traghettata questa il fratello sale sulla barca ed entrambi passano di là, di nuovo uno di essi riconduce la barca dal padre. Ricondotta la quale il figlio sbarca e il padre traghetta, e di nuovo il figlio che aveva attraversato in precedenza, sale sulla barca e la riporta dal fratello, e infine riportatala si imbarcano entrambi e attraversano. Con tale accortezza nel trasporto fluviale, la navigazione sarà forse portata a termine senza naufragare.

Commenti al prob. 19

- *Si tratta di un problema di attraversamento di soluzione più semplice dei precedenti. Questo rompicapo come gli altri due continua ad essere proposto anche oggi. La versione seguente è tratta da una raccolta di giochi matematici russi [1]: Un distaccamento di soldati deve attraversare un fiume, ma il ponte è rotto e il fiume è profondo: cosa fare? Improvvisamente l'ufficiale in carica scorge 2 bambini che giocano sulla riva dentro una barchetta a remi. La barca è così piccola però, che dentro ci possono stare solo 2 bambini o un soldato; eppure tutti i soldati riescono ad attraversare il fiume con la barchetta. In che modo?*
- *[1] Kordemsky, Giochi matematici russi,:395 problemi di matematica ricreativa, Sansoni, Firenze 1982.*

38. L’acquirente di 100 animali

- Un uomo volle comperare 100 animali di varie specie con 100 soldi, in modo che venisse acquistato un cavallo per tre soldi, un bue per 1 soldo e 24 pecore per 1 soldo. Dica, chi è capace, quanti furono i cavalli, quanti i buoi e quante le pecore.

Soluzione prob. 38

- Moltiplica ventitre per tre fa 69. E ventiquattro per due fa 48. Sono quindi 23 cavalli e 69 soldi, 48 pecore e 2 soldi, 29 buoi per 29 soldi. Aggiungi quindi 23 e 48 e 29, fanno 100 animali. E poi somma 69 e 2 e 29 fanno 100 soldi. Sono quindi messi insieme contemporaneamente 100 animali e 100 soldi.

Commenti prob. 38

Questo problema e il seguente fanno parte dei cosiddetti “problemi dei 100 uccelli”. Se indichiamo con x, y, z rispettivamente il numero dei cavalli, dei buoi e delle pecore si ha

$$x+y+z=100 \text{ e } 3x+y+z/24=100.$$

Eliminando y dalle due equazioni si ottiene $48x=23z$.

Una soluzione ovvia di questa equazione indeterminata è $x=23$ e $z=48$. La sostituzione di questi valori nella prima equazione fornisce $y=29$.

42. Una scala con 100 gradini

- C'è una scala che ha cento gradini. Sul primo gradino era posata una colomba, sul secondo due, sul terzo 3, sul quarto 4, sul quinto 5. Così su ogni gradino fino al centesimo. Dica, chi è in grado, quante colombe vi erano in tutto.

Soluzione prob.42

- Conterai così: prendi quella che sta sul primo gradino e aggiungila alle 99 che stanno nel novantanovesimo gradino e saranno 100. Aggiungi così le colombe del secondo gradino e quelle del novantottesimo e troverai 100. Così per ciascuno dei gradini superiori con quello inferiore del medesimo ordine, e troverai sempre in entrambi gradini 100. Il cinquantesimo gradino è solo, non avendo compagno. Similmente rimarrà solo il centesimo. Aggiungili insieme e troverai 5050 colombe.

Commenti prob. 42

- *Questo problema è assai interessante, presenta infatti uno stratagemma per calcolare la somma dei primi cento numeri naturali che può essere, ancora oggi, di grande suggestione didattica.*
- *L'autore per calcolare 1+2+...+99+100 considera le quarantanove somme 1+99, 2+98,…, 49+51 a cui aggiunge 50 e 100 ottenendo così il risultato* $5050=49\times100+50+100$.
- *Ricordiamo a questo proposito l' aneddoto relativo al grande matematico C. F. Gauss (1777,1855). Si narra che alla scuola elementare il suo maestro avesse proposto agli alunni il compito di sommare i numeri da 1 a 100. Sembra che il giovane Gauss abbia fornito la risposta assai velocemente sorprendendo l'insegnante, la storia non ci dice come Gauss avesse ottenuto il risultato, è comunque verosimile che avesse usato uno strattagemma simile a quello suggerito da Alcuino.*

43. Alcuni porci

- Un uomo aveva 300 porci e ordinò che essi fossero uccisi in tre giorni, un numero dispari ogni giorno. C'è un problema simile con 30. Dica, chi può, quanti porci sia di 300 che di 30, furono uccisi in tre giorni.
- *Soluzione. Prob. 43*
- Questa è una favola che non può essere risolta da nessuno, cioè come uccidere 300 porci o 30 in tre giorni, un numero dispari ogni giorno. Questa storiella viene proposta solo per sconcertare i giovani.

52. Un padre di famiglia

- Un padre di famiglia ordinò di portare 90 moggia di grano da una sua casa ad un'altra che era distante 30 leghe, in modo che un cammello portasse tutto quel frumento in tre viaggi, e in ogni viaggio portasse 30 moggi, il cammello invero per ogni lega mangiava un moggio. Dica, chi vuole, quanti furono i moggi rimasti.

Soluzione prob. 52

- Nel primo trasporto il cammello portò 30 moggi per 20 leghe e mangiò un moggio per ogni lega, cioè mangiò 20 moggi e ne rimasero 10.
- Nel secondo trasporto analogamente portò trenta moggi e ne mangiò 20, e ne rimasero dieci.
- Nel terzo trasporto fece lo stesso. Portò trenta moggi e ne mangiò 20, e ne rimasero dieci.
- Invero rimasero trenta moggi e 10 leghe di viaggio. Le quali 30 portò nel quarto trasporto alla casa e di queste ne mangiò 10 in viaggio e rimasero in tutto 20 moggi.

Commenti al prob. 52

- *Osserviamo in primo luogo che nella soluzione il cammello compie effettivamente tre viaggi anziché i quattro menzionati nel testo, infatti quello che Alcuino chiama quarto viaggio in realtà è la prosecuzione del terzo. Rileviamo inoltre che l'autore assume tacitamente che il cammello mangi solo quando è carico. A prima vista sembrerebbe che il cammello non dovesse portare nulla alla seconda casa, l'accorgimento di costituire un deposito a due terzi del percorso permette invece di portare in salvo ben 20 moggia. Sotto l'ipotesi della costituzione di un solo deposito la soluzione di Alcuino è ottimale, se si crea più di un deposito si può trasportare di più, per esempio con due depositi si possono portare a destinazione 25 moggia.*

Bibliografia per le Propositiones

- ALCUINO di YORK, *Giochi matematici alla corte di Carlomagno: Problemi per rendere acuta la mente ai giovani.* A cura di R. FRANCI, Edizioni ETS, Pisa, 2005.
- R. FRANCI, *Il ruolo della matematica nella istruzione carolingia e le* Propositiones ad acuendos juvenes *di Alcuino.* Bollettino UMI, La matematica nella società e nella cultura, 3-A (1999), 283-285.
- R.FRANCI, *Il lupo, la capra e il cavolo.* Archimede, 52, 2000, 67-76.
- R. FRANCI, *La matematica ricreativa nelle* Propositiones ad acuendos juvenes *di Alcuino di York,* in E.GALLO, L.GIACARDI,O.ROBUTTI (eds), *Conferenze e Seminari 2000-2001. Associazione Subalpina Mathesis. Seminario di storia delle matematiche "Tullio Viola",*

Torino, 2001, pp.165-178

GIOCHI MATEMATICI NEI TRATTATI D'ABACO

Da Leonardo Fibonacci a Luca Pacioli

I trattati d’abaco

- Nella trattatistica matematica italiana dei secoli XIIi-XVI hanno una particolare rilevanza i «trattati d’abaco». Si tratta di testi il cui scopo principale è quello di insegnare l’aritmetica dei numeri interi e delle frazioni e la sua applicazione alla risoluzione di problemi commerciali. Questi testi, manoscritti ebbero una larga diffusione. Ne è testimonianza la circostanza che ce ne sono pervenuti circa 300, elencati e brevemente descritti in
- VAN EGMOND, WARREN (1980), *Practical mathematics in the Italian Renaissance. A catalog of Italian abbacus manuscripts and printed books to 1600*, Firenze, Istituto e Museo di storia della Scienza, 1980.

Il *Liber abaci (1202,1228) di Leonardo Fibonacci*

- Il trattato di Leonardo, considerato il capostipite dei trattati d'abaco, fu il principale veicolo della diffusione in Occidente del sistema indo-arabico di rappresentare i numeri. Esso inizia con la presentazione di questo sistema, quello attualmente in uso, e con una dettagliata spiegazione dei metodi per eseguire le operazioni con gli interi e le frazioni, prosegue presentando la regola del tre e la sua applicazione alla risoluzione di problemi commerciali quali: calcolo del prezzo delle merci, cambio di valute, calcolo di perdite e profitti di compagnie commerciali, valutazioni di scambi di merci, calcolo di interessi. Nel trattato sono presenti molti giochi matematici, la maggior parte dei quali raggruppati nel capitolo XII.

- La maggior parte dei trattati d’abaco presenta giochi matematici. In questi testi i giochi sono mescolati agli altri problemi o raccolti in opportuni capitoli. Alcuni autori giustificano la presenza di questo tipo di questioni con l’intento di distrarre i lettori dalle noiose e ripetitive applicazioni pratiche.
- Giovanni de’ Danti nel suo *Tractato de l’Algorismo* (1370) prima di presentare alcuni giochi matematici scrive:
- *Ora per consolare la mente tractaremo de certe materie più per dare ai compagni dilecto che per utilità che crediamo trare d’esse*

- In un trattato fiorentino della metà del Quattrocento leggiamo:
- *“Ogni sano intelletto arebbe in fastidio non ragionando d’altri casi che di mercatantia, onde nel presente capitolo intendo mostrare alcuno caso di dilecto»*
- Altri autori considerano invece questi problemi adatti “ *per le sere di verno quando si sta al fuoco e mancono i ragionamenti, acciò s’abbi a ragionare di qualche cosa”.*

Tra la fine del Millequattrocento e gli inizi del Cinquecento, in Italia, furono compilate due ampie raccolte tutte dedicate a problemi di matematica ricreativa

- *De Viribus Quantitatis* di Luca Pacioli e
- *Libro dicto de giochi mathematici* di Pietro di Nicolao da Filicaia.
- Entrambe queste opere ci sono pervenute in un’unica copia manoscritta, la prima è conservata
- nella Biblioteca Universitaria di Bologna, la seconda nella Biblioteca Nazionale di Firenze.

Una trascelta di giochi dai trattati d’abaco

- La quantità di giochi matematici presenti nei trattati d’abaco è tale che è impossibile anche solo farne un elenco nel tempo di una conferenza, ci limiteremo a presentarne alcuni che ci sembrano ancor oggi validi come sussidi didattici.
- Nella nostra presentazione suddivideremo i giochi in due classi.
- I. Giochi che si risolvono con un ragionamento
- II. Giochi che si risolvono con strumenti matematici

Problemi di attraversamento

- In molti trattati comprese le due antologie *De viribus quantitatis* e *Libro dicto giochi matematici* vengono proposti i quesiti del «lupo la capra e il cavolo» e quello dell’attraversamento delle tre coppie che in questi testi sono tre mogli e tre mariti gelosi. In particolare nelle antologie si accenna alla generalizzazione al caso di quattro o cinque coppie. In questi casi il problema non ha soluzioni se si richiede che la barca trasporti solo due persone, circostanza questa di cui avverte anche Pacioli in *De Viribus quantitatis*. Per una discussione del problema si può vedere l’appendice in: ALCUINO di YORK, *Giochi matematici alla corte di Carlomagno:* A cura di R. FRANCI, Edizioni ETS, Pisa, 2005.

Problemi di travaso 1

- *«Sono 3 anpolle che ll'una tiene 8 once ed è piena, e ll'altra tiene 5 once ed è vuota e ll'altra tiene 3 once ed è vota. Ora voglio mettere in questa anpolla delle 5 once, 4 once senza altra misura»*
- Schematizziamo la soluzione proposta dall'abacista nel seguente diagramma dove ogni colonna rappresenta lo stato delle tre ampolle dopo ogni travaso

8	5	5	2	2	7	7	4	4
0	0	3	3	5	0	1	1	4
0	3	0	3	1	1	0	3	0

- Una soluzione più corta

8	3	3	6	6	1	1	4
0	5	2	2	0	5	4	4
0	0	3	0	2	2	3	0

Problemi di travaso 2

- In qualche caso il problema è posto con dati diversi: ampolla piena da 12 once, quelle vuote da 5 e 7 once. La soluzione richiede 15 travasi.
- Questo problema si può generalizzare si può dimostrare infatti che:
- Se A, B, C sono le capacità di tre recipienti con $A<B<C$, A,B,C interi, A e B primi fra loro $C=A+B$ allora con le tre brocche si può misurare una qualunque quantità intera $0 \leq Q \leq C$.
- Spesso problemi che si presentano come giochi sono suscettibili di generalizzazioni matematiche interessanti

Il problema dei portinai

- *Uno signore à uno suo fante e mandalo nel giardino per 7 mele e dicie: tu troverai 3 portinai che ciascuno ti dirà io voglio la metà di tutte e due più di quelle che ti rimangono dopo la divisione. Adomando quante ne colse di prima volendo che gli rimanesse 7.*
- La soluzione suggerita si può compendiare così:
- (7+2) 2 = 18 mele che si devono avere all'ultima porta
- (18+2) 2 = 40 « « « « alla porta mediana
- (40+2) 2 = 84 « « « « alla prima porta.

- Nei trattati d'abaco questo problema è presente con diverse formulazioni in cui variano il numero delle porte e la quantità di mele da consegnare ai guardiani.

Le uova rotte 1

- *Uno cozone di chavagli chavalchando uno puledro per desaventura ruppe a una forese huova che aveva in una cesta et volendogliela mendare l'adimandò quante erano. A chui ella rispose non lo sapere, ma anoverandole a 2 a 2 n'avanzava 1, et anoverandole a 3 a 3 n'avanzava una, et anoverandole a 4 a 4 n'avanzava 1, et anoverandole a 5 a 5 n'avanzava una, et anoverandole a 6 a 6 n'avanzava una, et anoverandole a 7 a 7 non avanzava alchuna. Adimandasi quante erano le dette huova. Questa anchora per natura et proprietà che ànno i numeri si troverà.*

Soluzione: le uova rotte 1

- L’autore osserva dapprima che 60 è il «minore numero che si divide interamente per 2, 3, 4, 5, 6 e giungendovi 1 si ottiene 61» che diviso per gli stessi numeri da resto 1 per cui se 61 si dividesse per 7 sarebbe il numero delle uova, ma così non è, quindi è « necessario sopra 61 tante volte 60 agugnere che la somma si divida in 7 interamente». Egli calcola 61+60=121, 121+60= 181, 181+60= 241 e ogni volta osserva che il risultato non è divisibile per 7 e infine 241+60=301 si divide per 7 e quindi è il numero delle uova. Egli osserva infine che vi sono infinite altre soluzioni che si ottengono aggiungendo a 301 multipli interi di 420.

Le uova rotte 2

- *Anchora per a chaso a uno furono rotte huova che aveva in uno paniere et per mendarle dimandò quante erano et colui rispose non lo sapere, ma anoverandole a 2 a 2 n'avanzava una, et anoverandole a 3 a 3 n'avanzava 2, et anoverandole a 4 a 4 n'avanzava 3, et anoverandole a 5 a 5 n'avanzava 4, et anoverandole a 6 a 6 n'avanzava 5, et anoverandole a 7 a 7 non avanzava alchuna. Adimandasi quante erano l'uova.*

Soluzione: le uova rotte 2

- Di nuovo l’autore osserva che il minore numero che si divide interamente per 2, 3, 4, 5, 6 «è 60 del quale tratto uno rimarrà 59 el quale diviso per 2 avanza uno et per 3 avanza 2 et per 4 avanza 3 et per 5 avanza 4 et per 6 avanza 5», se questo numero fosse divisibile per 7 sarebbe la soluzione, ma purtroppo non è così. Come prima l’autore aggiunge 60 a 59 e ottiene 119 che essendo divisibile anche per 7 soddisfa a tutte le condizioni. « E però diremo che le huova erano 119» Anche in questo caso si osserva che si ottengono altre soluzioni aggiungendo a 119 multipli di 420 e per scegliere la soluzione «si vuole avere riguardo al paniere».

Problemi di alberi

- *Egli è uno albero che è sotterra il 1/3 e il ¼ di tutto l'albero e sopra alla terra se ne vede 21 braccia. Adimandasi quanto era tutto.*
- L'abacista risolve questo quesito con il metodo di falsa posizione. Egli suppone che la lunghezza da trovare sia 12 braccia. In tal caso la parte fuori terra sarebbe
- $12 \ - \left(\frac{1}{3}12 + \frac{1}{4}12\right) = (12 - (4 + 3) = 5$
- Ponendo 12 si trova 5 invece di 21 pertanto il valore cercato si ottiene dalla proporzione 12:5=x:21 da cui
- $x = \frac{21 \times 12}{5} = 50 + \frac{2}{5}$

Problemi di alberi osservazioni

- Nel *Liber abaci* c'è un intero paragrafo dedicato a questioni di questo tipo che è intitolato proprio *Questiones arbororum et similium.* Problemi analoghi per formulazione e risoluzione hanno come soggetti lance conficcate in terra, bastoni immersi nell'acqua, coppe formate di più pezzi, e pesci suddivisi in testa corpo e coda. Questi problemi sono molto presenti nei trattati d'abaco. Ecco un'enunciato relativo a una coppa:
- *Egli è una coppa di 3 pezzi che il coperchio pesa il 1/5 di tutta la coppa e il nappo pesa il 1/6 di tutta, el ghambo pesa 20 oncie. Vo' sapere quanto pesa tutta la coppa.*

Problemi di svuotamento di vasche 1

- La formulazione classica di questo tipo di problemi è la seguente:
- Una vasca ha n scarichi, aprendo il primo si vuota in x_1 ore, aprendo il secondo in x_2 etc., si chiede in quanto tempo si vuoterà aprendo contemporaneamente tutti gli scarichi. La soluzione si ottiene ragionando così: in un'ora aprendo lo i-esimo scarico s vuota 1/ x_i di vasca, quindi in un'ora aprendo tutti gli scarichi si vuota
- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ \ldots + \frac{1}{x_n} = \frac{x_1+x_2+\ \ldots+x_n}{x_1 x_2\ \ldots.x_n}$ di vasca, quindi per vuotarla tutta si impiegheranno $\frac{x_1 x_2\ \ldots x_n}{x_1+x_2\ \ldots.+x_n}$ ore.

Problemi di svuotamento di vasche 2

- Le varianti di questo problema riguardano le situazioni più disparate: vari animali che mangiano una pecora, mulini che macinano grano, navi con più vele, operai che fanno un lavoro. Ecco alcuni enunciati curiosi:
- *Sono tre huomini in una prigione e volendola rompere, el primo dicie che la romperà in 6 ore, el secondo dicie che la romperà in 12 ore, el tertio dicie che la romperà in 18 ore. Addimandasi, lavorando tutti e tre insieme, in quanto tempo romperanno detta prigione.*
- *Una nave à tre vele in tal luogho che alzando la prima vela farebbe un viaggio in 10 dì et alzando la seconda farebbe il viaggio in 12 dì et alzando la terza farebbe il viaggio in 15 dì. Adimandasi alzandole tutte e tre a un tratto in quanti dì farebbe quel viaggio.*

Problemi di inseguimento

- *Una golpe è inanzi a uno cane 80 passi et omgni 7 passi del cane sono 5 della golpe, adimando in quanto tempo la giongerà*

Ogni 5 passi della volpe il cane ne guadagna 2, quindi il problema è risolto dalla proporzione 5:2=x:80.

- *Due huomini fanno uno viaggio. Il primo uomo vae ongni dì 30 miglia, il sechondo uomo vae il primo dì 2 miglia, e el sechondo dì va 4, el terzo dì 6 e chosì crescie ongni dì 2 miglia. Adomando in quanto tempo l'arà ragiunto. Fa choxì: parti 30 in 2, ne viene 15 e poi raddoppia fa 30 e poi ne trai 1 restano 29, e in 29 dì l'arà ragiunto.*

Commento a problemi di inseguimento

- Detto x il numero dei giorni che occorrono ai due viaggiatori per congiungersi e ricordando che la somma dei primi x numeri pari è ½ (2+2x)x, si ha che questo è il numero di miglia percorso dal secondo viaggiatore, mentre il primo ne avrà percorse 30 x. Pertanto
- ½ (2+2x)x=30x da cui segue 1+x=30 e infine x=30-1=29.
- Questi problemi hanno diverse formulazioni dove il secondo viaggiatore percorre tratti in diversa progressione.
- Quasi sempre questi problemi sono preceduti da problemi in cui si insegna a calcolare la somma di un certo numero di termini di particolari progressioni.

Trovare i punti di due o tre dadi

Si tratta di indovinare i punti di due o tre dadi che sono stati gettati facendo eseguire sui punti medesimi alcune operazioni in modo che i numeri da indovinare risultino la cifra delle decine e quella delle unità del numero che si ottiene.

Detti x e y i punti ignoti a chi deve indovinare, costui chiede di eseguire le seguenti operazioni

$$5(2x+5)+y - 25 = 10x + y.$$

Se i dadi sono tre e i punti ottenuti sono x, y, z, la sequenza di operazioni da far eseguire è

$$10(52x+5)+y)z-250=100x+10y+z.$$

Trovare un anello tra più persone

- Viene nascosto un anello fra non più di nove persone, si tratta di indovinare la persona che nasconde l'anello, il dito e la falange in cui si trova.
- La sua soluzione è analoga a quella del trovare i punti di tre dadi. In questo caso si assegna un numero x a ciascuna persona, un numero y a ciascun dito e un numero z a ciascuna falange e poi si fanno eseguire le stesse operazioni cioè
- $10(52x+5)+y)z-250=100x+10y+z.$
- Giochi di questo tipo erano particolarmente adatti alle riunioni conviviali.

Bibliografia giochi matematici in trattati d'abaco

- [1] -D. BRESSANINI, S. TONIATO, *I giochi matematici di Fra' Luca Pacioli. Trucchi enigmi e passatempi di fine Quattrocento, Edizioni Dedalo, Bari, 2011.*
- [2]- N. GERONIMI, *Giochi matematici del medioevo. I conigli di Fibonacci e altri rompicapi liberamente tratti dal* Liber abaci, Bruno Mondadori, Milano, 2006.
- [3]- L. PACIOLI, *De viribus quantitatis,* Aboca Edizioni, Sansepolcro, 2010
- [4]- F. PEIRETTI, *Il matematico si diverte. Duecento goichi ed enigmi che hanno fatto la storia della matematica,* Longanesi, Milano, 2010.
- [5]- F. PEIRETTI, *Matematica per gioco,* Longanesi, Milano, 2012