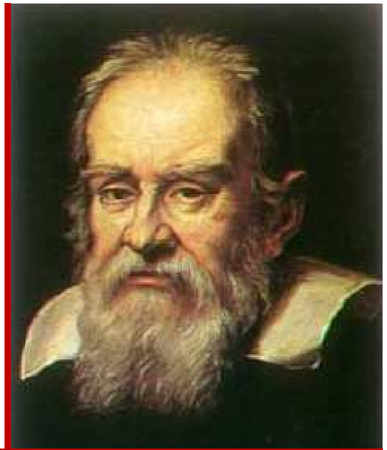


“La storia della Matematica in Classe:
dalle materne alle superiori”

La storia del Calcolo delle Probabilità in classe

Chiara Pizzarelli

Dipartimento di Matematica
dell’Università di Torino

II Convegno Nazionale – Ivrea 14.3.2013

Il gioco come punto di partenza

Cardano voleva guadagnare, Galileo aiutare i suoi amici, Pascal e Fermat erano stati incuriositi dal problema di un giocatore d'azzardo incallito, Huygens da soluzioni non accompagnate da metodi risolutivi. Negli anni si scopre che non solo la **teoria non contrastava mai con l'esperienza**, ma che con essa si potevano **velocizzare i calcoli e generalizzare i problemi**!

Obiettivo:

- Descrivere alcuni episodi della storia del «**problema del gioco dei dadi**» e del «**problema della divisione della posta**», usando anche testi originali, al fine di offrire spunti e suggerimenti per attività didattiche, adatte a diversi gradi scolari e con elementi e aspetti interdisciplinari.
- *Sperimentazione in classe*: la creazione di un parallelismo tra il **percorso di 'scoperta'** degli studenti e quello dei matematici protagonisti della storia.

Un approccio storico al Calcolo delle Probabilità: caratteri ed esempi

1) Osservazione empirica: il gioco e l'effetto **sorpresa**

2) L'uso di **testi originali**: il lato umanistico della matematica, punti di vista ed esercizi alternativi

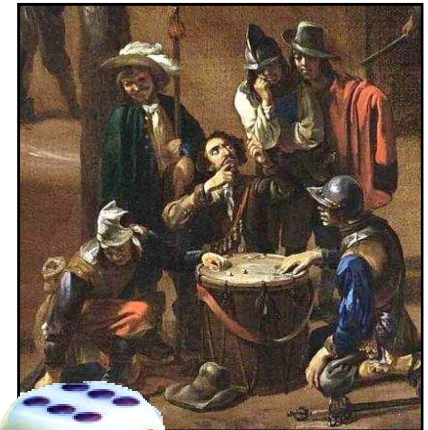
3) *Problem solving*: tra metodi diversi e collaborazione. Risultati di una **sperimentazione in classe**.

Osservazione empirica: il gioco e l'effetto sorpresa

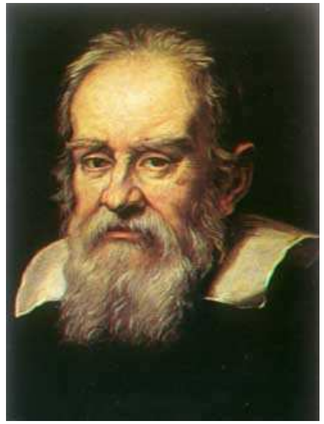
COMBINAZIONI E DISPOSIZIONI CON I DADI

Galileo Galilei, *Considerazione sopra il giuoco dei dadi* (1620)

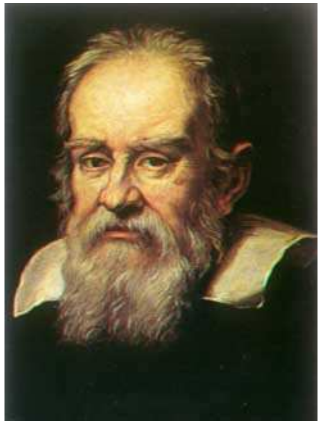
Galileo non diede neanche un titolo allo scritto, che fu pubblicato solo in epoca successiva. Il testo non è quindi un'opera teorica, ma una **risposta a un quesito** posto da alcuni amici fiorentini, giocatori d'azzardo.



Lanciando 3 dadi, l'esperienza insegna che **la somma 10 esce più spesso della somma 9**. Com'è possibile?
Le possibilità di ottenere 9 sono tante quante quelle di ottenere 10!



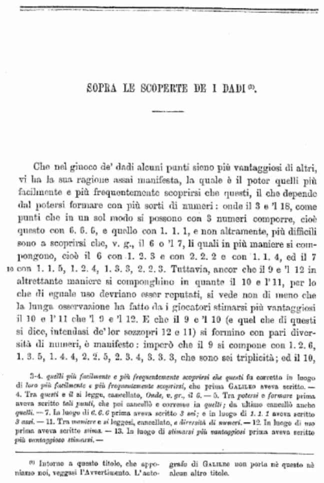
PERCHÉ LA MATEMATICA SEMBRA CONTRASTARE CON LA **LUNGA OSSERVAZIONE** DEI GIOCATORI?



Lanciando 3 dadi, l’esperienza insegna che **la somma 10 esce più spesso della somma 9**. Com’è possibile?

Le possibilità di ottenere 9 sono tante quante quelle di ottenere 10!

Le opere di Galileo Galilei,
Ed. Nazionale, Firenze, Barbera, 1933, vol. VIII



SOPRA LE SCOPERTE DE I DADI [1].

Che nel giuoco de' dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi, il che depende dal potersi formare con più sorti di numeri: onde il 3 e 'l 18, come punti che in un sol modo si possono con 3 numeri comporre, cioè questo con 6. 6. 6, e quello con 1. 1. 1, e non altramente, più difficili sono a scoprirsi che, v. g., il 6 o 'l 7, li quali in più maniere si compongono, cioè il 6 con 1. 2. 3 e con 2. 2. 2 e con 1. 1. 4, ed il 7 con 1. 1. 5, 1. 2. 4, 1. 3. 3, 2. 2. 3. Tuttavia, ancor che il 9 e 'l 12 in altrettante maniere si componghino in quante il 10 e l'11, per lo che di egual uso devriano esser reputati, si vede non di meno che la lunga osservazione ha fatto da i giocatori stimarsi più vantaggiosi il 10 e l'11 che 'l 9 e 'l 12. E che il 9 e 'l 10 (e quel che di questi si dice, intendasi de' lor sozzopri 12 e 11) si formino con pari diversità di numeri, è manifesto: imperò che il 9 si compone con 1. 2. 6, 1. 3. 5, 1. 4. 4, 2. 2. 5, 2. 3. 4, 3. 3. 3, che sono sei triplicità; ed il 10,

3-4. *quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi che questi* fu corretto in luogo di *loro più facilmente e più frequentemente scoprirsi*, che prima GALILEO aveva scritto. — 4. Tra *questi* e *il* si legge, cancellato, *Onde, v. gr., il 6*. — 5. Tra *potersi* e *formare* prima aveva scritto *tali punti*, che poi cancellò e corresse in *quelli*; da ultimo cancellò anche *quelli*. — 7. In luogo di *6. 6. 6* prima aveva scritto *3 sei*; e in luogo di *1. 1. 1* aveva scritto *3 assi*. — 11. Tra *maniere* e *si* leggesi, cancellato, *e diversità di numeri*. — 12. In luogo di *uso* prima aveva scritto *stima*. — 13. In luogo di *stimarsi più vantaggiosi* prima aveva scritto *più vantaggioso stimarsi*. —

[1] Intorno a questo titolo, che apponiamo noi, veggasi l'Avvertimento. L'autografo di GALILEO non porta nè questo nè alcun altro titolo.

“che il 9 e il 10 si formino con pari diversità di numeri è manifesto”

modi	**9**	**10**	**modi**
6	(1, 2, 6)	(1, 3, 6)	6
6	(1, 3, 5)	(1, 4, 5)	6
3	(1, 4, 4)	(2, 2, 6)	3
3	(2, 2, 5)	(2, 3, 5)	6
6	(2, 3, 4)	(2, 4, 4)	3
1	(3, 3, 3)	(3, 3, 4)	3
25	**somma dei modi**		**27**

Per entrambe le somme esistono 6 combinazioni, ma ogni combinazione può uscire in MODI DIFFERENTI!

~~***COMBINAZIONI CON RIPEZIONE***~~ ***DISPOSIZIONI***

L’ESPERIENZA NON È CONTRADDETTA

Un errore comune
il «fenomeno d'Alembert»

Anche famosi matematici hanno sbagliato! Nel computo dei modi possibili in cui si può presentare una certa somma **si devono considerare**:

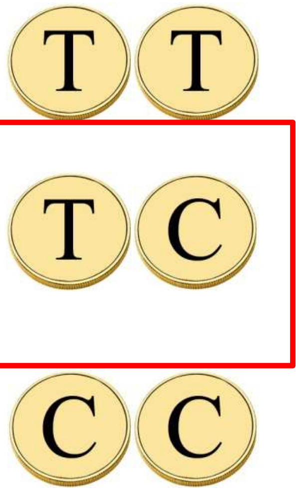
DISPOSIZIONI

~~***COMBINAZIONI***~~
CON RIPEZIONE

Lanciando 2 monete indistinguibili: **quanti sono i CASI EQUIPOSSIBILI?**

Jean Baptiste Le Rond d'Alembert
(1717-1783)

« il caso con una T e una C si verifica con la stessa facilità del caso TT e CC »



$$C_{n,k} = \binom{n+k-1}{k} = \binom{3}{2}$$

2 oggetti a gruppi di 2 non ordinati

… 3 casi?

Un errore comune
il «fenomeno d'Alembert»

Anche famosi matematici hanno sbagliato! Nel computo dei modi possibili in cui si può presentare una certa somma **si devono considerare**:

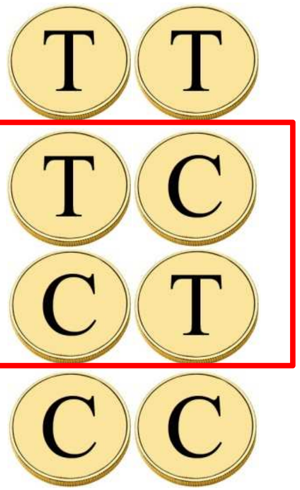
DISPOSIZIONI

~~COMBINAZIONI~~ CON RIPEZIONE

Lanciando 2 monete indistinguibili: **quanti sono i CASI EQUIPOSSIBILI?**

Ma se al posto di lanciare di nuovo il dado, **capovolgo le monete «T e C»?**

«C e T» è un altro risultato!



$D_{n,k} = n^k = 2^2$

2 oggetti disposti a gruppi di 2

4 casi!

La casistica completa di Galileo

18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
(6,6,6) 1	(6,6,5) 3	(6,6,4) 3	(6,6,3) 3	(6,6,2) 3	(6,6,1) 3	(6,5,1) 6	(6,4,1) 6	(6,3,1) 6	(6,2,1) 6	(6,1,1) 3	(5,1,1) 3	(4,1,1) 3	(3,1,1) 3	(2,1,1) 3	(1,1,1) 1
		(6,5,5) 3	(6,5,4) 6	(6,5,3) 6	(6,5,2) 6	(6,4,2) 6	(6,3,2) 6	(6,2,2) 3	(5,3,1) 6	(5,2,1) 6	(4,2,1) 6	(3,2,1) 6	(2,2,1) 3		
			(5,5,5) 1	(6,4,4) 3	(6,4,3) 6	(6,3,3) 3	(5,5,1) 3	(5,4,1) 6	(5,2,2) 3	(4,3,1) 6	(3,3,1) 3	(2,2,2) 1			
				(5,5,4) 3	(5,4,4) 3	(5,4,3) 6	(5,4,2) 6	(5,3,2) 6	(4,4,1) 3	(4,2,2) 3	(3,2,2) 3				
					(5,3,5) 3	(5,2,5) 3	(5,3,3) 3	(4,4,2) 3	(4,3,2) 6	(3,3,2) 3					
						(4,4,4) 1	(4,4,3) 3	(4,3,3) 3	(3,3,3) 1						
1	**3**	**6**	**10**	**15**	**21**	**25**	**27**	**27**	**25**	**21**	**15**	**10**	**6**	**3**	**1**

“la somma di tutte le scoperte possibili a farsi con le facce dei 3 dadi è 216”

$$(1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 25 + 27) \times 2 = 216$$

Conviene scommettere sull’uscita dell’11 o del 10, piuttosto che su quella del 12 e del 9!

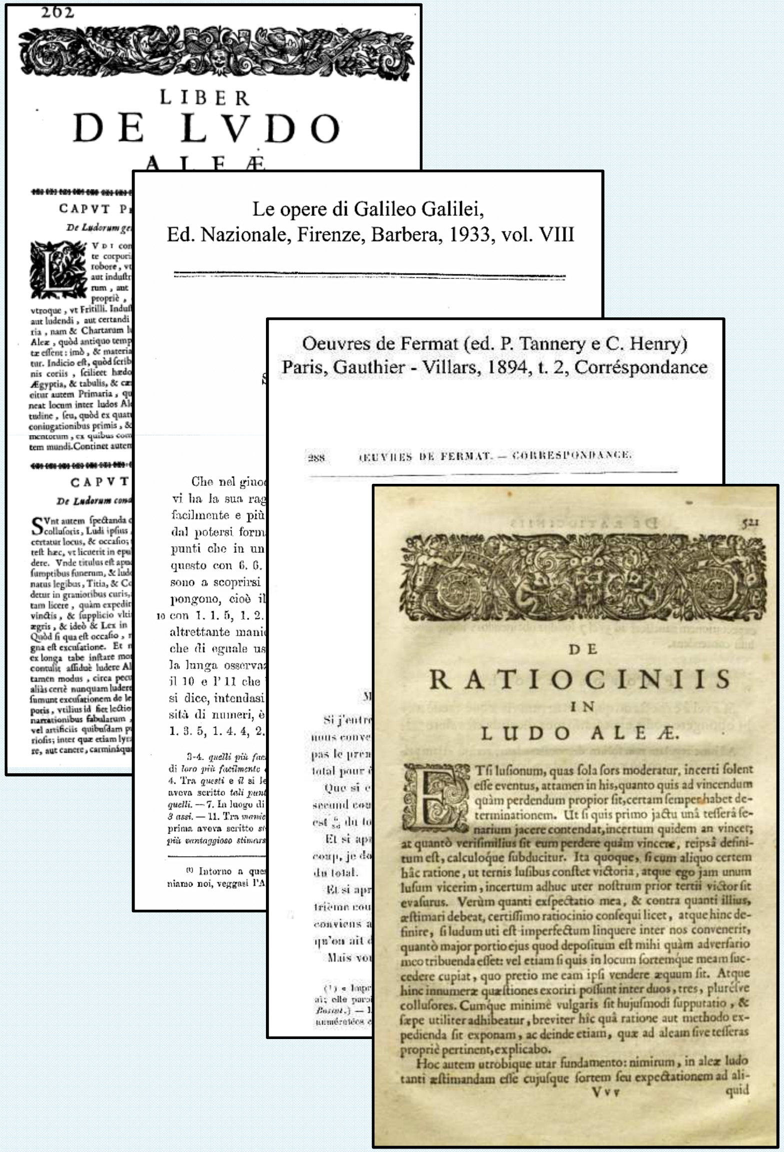
TAVOLA VANTAGGIOSA PER I GIOCATORI

Un approccio storico al Calcolo delle Probabilità: caratteri ed esempi

1) Osservazione empirica: il gioco e l'effetto **sorpresa**

2) L'uso di **testi originali**: il lato umanistico della matematica, punti di vista ed esercizi alternativi

3) *Problem solving*: tra metodi diversi e collaborazione. Risultati di una **sperimentazione in classe**.



L’uso di testi originali: il “lato umano” della matematica

COMBINAZIONI E DISPOSIZIONI CON GLI ASTRAGALI

Girolamo Cardano (1501-1576)

Illustre medico, ma anche fisico e matematico. La sua *Opera omnia* (1663) contiene la sua autobiografia e alcuni manoscritti sul gioco dei dadi, tra cui ***De Ludo Aleae*** (1526)

- consigli ai giocatori
- la fortuna e le frodi nel gioco
- note storiche sul gioco d’azzardo
- paesi in cui è bandito
- regole e considerazioni

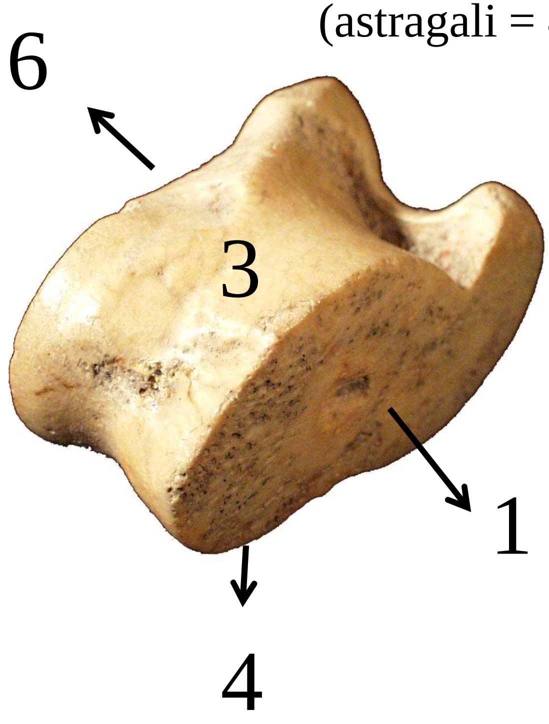
“mi vergogno di dire che ho giocato non in modo sporadico, ma ogni giorno, per più di 40 anni a scacchi e per 25 ai giochi d’azzardo”

Cap. 31 – Applicazione al gioco con 4 astragali

1) Considerare l'intero circuito (*spazio campione*) ⟶ $\boxed{256 = 4^4}$

2) **e il numero di quei lanci che rappresentano in quanti modi può presentarsi il risultato favorevole**

(astragali = 4 facce)



3) confrontare quel numero con il resto del circuito

Cardano: scommettere sui tiri di 4 astragali

Properzio
«anche a me, che cerco un tiro di Venere grazie ad astragali propizi, vengono sempre fuori Cani dannosi!»

- **Venere** (= 4 numeri diversi)
  Capitava un po' più spesso del caso con numeri tutti uguali, 64ª parte di 256, considerato un tiro fortunato

- **Stesicoreo** (= due 1 e due 3)
  Era considerato tra i tiri più rari

- **Cane** (= quattro 1)
  Era considerato il tiro più sfortunato

- **Euripideo** (= quattro 4)
  Considerato un tiro «quasi perfetto»

(i, i, i, i)	(i, i, i, j) con $i \neq j$	(i, i, j, k) con $j, k \neq i$	(i, i, j, j) con $j \neq i$	(i, j, k, t) $\neq$
?	?	?	?	?

(i, i, i, i)		(i, i, i, j) con i ≠ j		(i, i, j, k) con j, k ≠ i			(i, j, k, t) ≠		
(**1**,1,1,1)	1	(**1,1,1**,3) (**1,1,1**,4) (**1,1,1**,6)	3	(**1,1**,3,4) (**1,1**,4,6) (**1,1**,3,6)	(**1,1**,3,3) (**1,1**,4,4) (**1,1**,6,6)	6	(1,3,4,6)	1	
(**3**,3,3,3)	1	(**3,3,3**,1) (**3,3,3**,4) (**3,3,3**,6)	3	(**3,3**,1,4) (**3,3**,1,6) (**3,3**,4,6)	(**3,3**,4,4) (**3,3**,6,6)	5	**256** **DISPOSIZIONI** **CON E SENZA** **RIPETIZIONE**		
(**4**,4,4,4)	1	(**4,4,4**,1) (**4,4,4**,3) (**4,4,4**,6)	3	(**4,4**,1,3) (**4,4**,1,6) (**4,4**,3,6)	(**4,4**,6,6)	4			
(**6**,6,6,6)	1	(**6,6,6**,1) (**6,6,6**,3) (**6,6,6**,4)	3	(**6,6**,1,3) (**6,6**,1,4) (**6,6**,3,4)		3			
4 · 1 = 4		**12 · 4 = 48**		**12 · 12 = 144**	**6 · 6 = 36**		**1 · 24 = 24**		
Unica disposizione		4 modi per ognuna	**(i, i, i, j)** **(i, i, j, i)** **(i, j, i, i)** **(j, i, i, i)**	12 modi per ciascuna combinazione	6 modi per ciascuna combinazione		24 modi per 4 elementi diversi		
$\frac{4!}{4!} = 1$		$\frac{4!}{3!} = 4$		$\frac{4!}{2!} = 12$	$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$		$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$		**Oggi**

Cardano: scommettere sui tiri di 4 astragali

Properzio
«anche a me, che cerco un tiro di Venere grazie ad astragali propizi, vengono sempre fuori Cani dannosi!»

- **Venere** (= 4 numeri diversi)
  Capitava un po' più spesso del caso con numeri tutti uguali, 64ª parte di 256, considerato un tiro fortunato — $\dfrac{24}{256} \approx \dfrac{1}{11}$

- **Stesicoreo** (= due 1 e due 3)
  Era considerato tra i tiri più rari — $\dfrac{6}{256} \approx \dfrac{1}{43}$

- **Cane** (= quattro 1)
  Era considerato il tiro più sfortunato

- **Euripideo** (= quattro 4)
  Considerato un tiro «quasi perfetto» — $\dfrac{1}{256}$

(i, i, i, i)	(i, i, i, j) con $i \neq j$	(i, i, j, k) con $j, k \neq i$	(i, i, j, j) con $j \neq i$	(i, j, k, t) $\neq$
4	48	144	36	24

Un approccio storico al Calcolo delle Probabilità: caratteri ed esempi

1) Osservazione empirica: il gioco e l’effetto **sorpresa**

2) L’uso di **testi originali**: il lato umanistico della matematica, punti di vista ed esercizi alternativi

3) *Problem solving*: tra metodi diversi e collaborazione. Risultati di una **sperimentazione in classe**.

Il *problema della divisione della posta* in classe

Attività didattica della durata di 2 ore, realizzata grazie alla collaborazione del professor Simone Ballari presso una **classe mista di 3° e 4°** del Liceo Scientifico Immacolata di Pinerolo (TO). Solo i ragazzi di 4° avevano avviato un'unità didattica sul Calcolo delle Probabilità.

Due giocatori A e B di *pari abilità* decidono di effettuare un certo numero di partite e stabiliscono che vince il gioco, e quindi ritira la posta di **24** euro, chi per primo vince **6 partite**

Per qualche motivo il gioco s'interrompe prima, quando:

A ha vinto 5 partite **B ha vinto 3 partite**

Come deve essere divisa la posta in gioco?

Il *problema della divisione della posta* in classe

Due giocatori A e B, di pari abilità, disputano una serie di partite e scommettono 12 euro a testa. Vince il gioco, e quindi ritira l'intera posta di 24 euro, chi per primo raggiunge un totale di 6 mani vinte. I giocatori, però, devono sospendere il gioco prima che uno dei due possa vincere.
Si domanda: se la sospensione avviene quando A ha vinto cinque partite e B tre, come deve essere ripartita la posta fra i due giocatori, in modo tale che la ripartizione sia equa?
La nostra soluzione:

Risposta comune:

- Per prima cosa in modo matematico, dividendo i soldi totali per il numero delle partite totali vinte (5+3).
- Abbiamo così trovato i soldi per ogni unità (partita), facendo una moltiplicazione abbiamo trovato che al giocatore A spettano 15 € e al giocatore B 9 €.

Dubbi sull'equità del metodo

- Questo è un ragionamento giusto ma non logico, perché ad A manca una sola partita ~~mi~~ per vincere 24 € mentre a B ne mancano 3.

$24 : (5+3) = 3$

$A = 5 \cdot 3 = 15$ €

$B = 3 \cdot 3 = 9$ €

PROPORZIONE IN FUNZIONE DELLE PARTITE VINTE RISPETTO ALLE PARTITE GIOCATE

Il *problema della divisione della posta* in classe

Due giocatori A e B, di pari abilità, disputano una serie di partite e scommettono 12 euro a testa. Vince il gioco, e quindi ritira l'intera posta di 24 euro, chi per primo raggiunge un totale di 6 mani vinte. I giocatori, però, devono sospendere il gioco prima che uno dei due possa vincere.
Si domanda: se la sospensione avviene quando A ha vinto cinque partite e B tre, come deve essere ripartita la posta fra i due giocatori, in modo tale che la ripartizione sia equa?
La nostra soluzione:

Dai dubbi sul primo metodo nascono nuovi tentativi:

3) 24 ~~partite~~ € : 6 partite = x soldi : 5 partite vinte

A → $\frac{24 \times 5}{6} = \frac{120}{6} = 20$ € ad A +

B → $\frac{24 \times 3}{6} = \frac{72}{6} = 12$ € a B =

24 €

NO

PROPORZIONE RISPETTO ALLE 6 PARTITE TOTALI

2) A → gli mancano una partita x vincere → 1 +

B → gli mancano 3 partite x vincere → 3 =

4

$\frac{24}{4} = 6$

giocatore A = $6 \cdot 3 = 18$ € +

giocatore B = $6 \cdot 1 = 6$ € =

24 €

IDEA DELLE PARTITE "FUTURE"

Il *problema della divisione della posta* in classe

Due giocatori A e B, di pari abilità, disputano una serie di partite e scommettono 12 euro a testa. Vince il gioco, e quindi ritira l'intera posta di 24 euro, chi per primo raggiunge un totale di 6 mani vinte. I giocatori, però, devono sospendere il gioco prima che uno dei due possa vincere.
Si domanda: se la sospensione avviene quando A ha vinto cinque partite e B tre, come deve essere ripartita la posta fra i due giocatori, in modo tale che la ripartizione sia equa?
La nostra soluzione:

Una soluzione «corretta»:

DIFFICOLTÀ A INTRODURRE CONCETTI DI PROBABILITÀ CONOSCIUTI

$Q = 24$ $\quad s = 8$

$A = 5$ $\quad B = 3$

Vincita ~~B~~ per ogni mano $= \frac{24}{8} = 3$

$A = 5 \cdot 3 = 15$
$B = 3 \cdot 3 = 9$

probabilità che B arrivi a 6 partite → 0,125
A → 0,5 (0,875)

La soluzione di Luca Pacioli

«Una brigata gioca a palla a 60. el gioco e. 10. per caccia. E fanno posta di ducati 10.

(*60*; *50* , *20*)

(*6*; *5* , *2*)

Accade per certi accidenti che non possano finire e l'una parte a. 50. e l'altra. 20. Si domanda che tocca per parte de la posta.

Prima dei considerare quante caccie al più fra l'una e l'altra parte si possano fare, che seran 11.

Cioè quando fanno a una. 50. per uno.

Ora vedi quella da. 50. che parte hanno de tutte queste caccie che ne hanno li. $\frac{5}{11}$. e quelli da 20. ne hanno li $\frac{2}{11}$.»

Numero max partite:

$2s - 1 = 11$

$$(s; r , t)$$

$$\frac{r}{2s-1} : \frac{t}{2s-1}$$

$\frac{5}{11}$ **di 10 ducati** al 1° giocatore

$\frac{2}{11}$ **di 10 ducati** al 2° giocatore

+

Le monete restanti vanno ulteriormente divise in proporzione

L'intervento di Niccolò Tartaglia (1499-1557)

«La sua regola a me non pare, né bella, né buona, perché se per sorte una delle parti havesse 10, e l'altra avesse nulla, procedendo per tal sua regola seguirà che quella parte, che havesse il detto 10 dueria tirar cosa alcuna. …**vi si troverà da litigare!**»

(*60*; *10* , *0*) = (*6*; *1* , *0*)

$$\frac{r}{2s-1} : \frac{t}{2s-1}$$

$\frac{1}{11}$ ~~**di 10 ducati** al 1° giocatore~~

~~+~~

$\frac{0}{11}$ **di 10 ducati** al 2° giocatore

~~Le monete restanti vanno ulteriormente divise in proporzione~~

RISULTATO IN FUNZIONE DELLE PARTITE DA VINCERE

RISULTATO IN FUNZIONE DELLE **PARTITE VINTE**

$24 : (5+3) = 3$

$A = 5 \cdot 3 = 15$ €

$B = 3 \cdot 3 = 9$ €

RISULTATO IN FUNZIONE DELLE **PARTITE DA VINCERE**

$$A_{-a}\, B_{-b}$$

- **a** = partite che mancano ad A
- **b** = partite che mancano a B

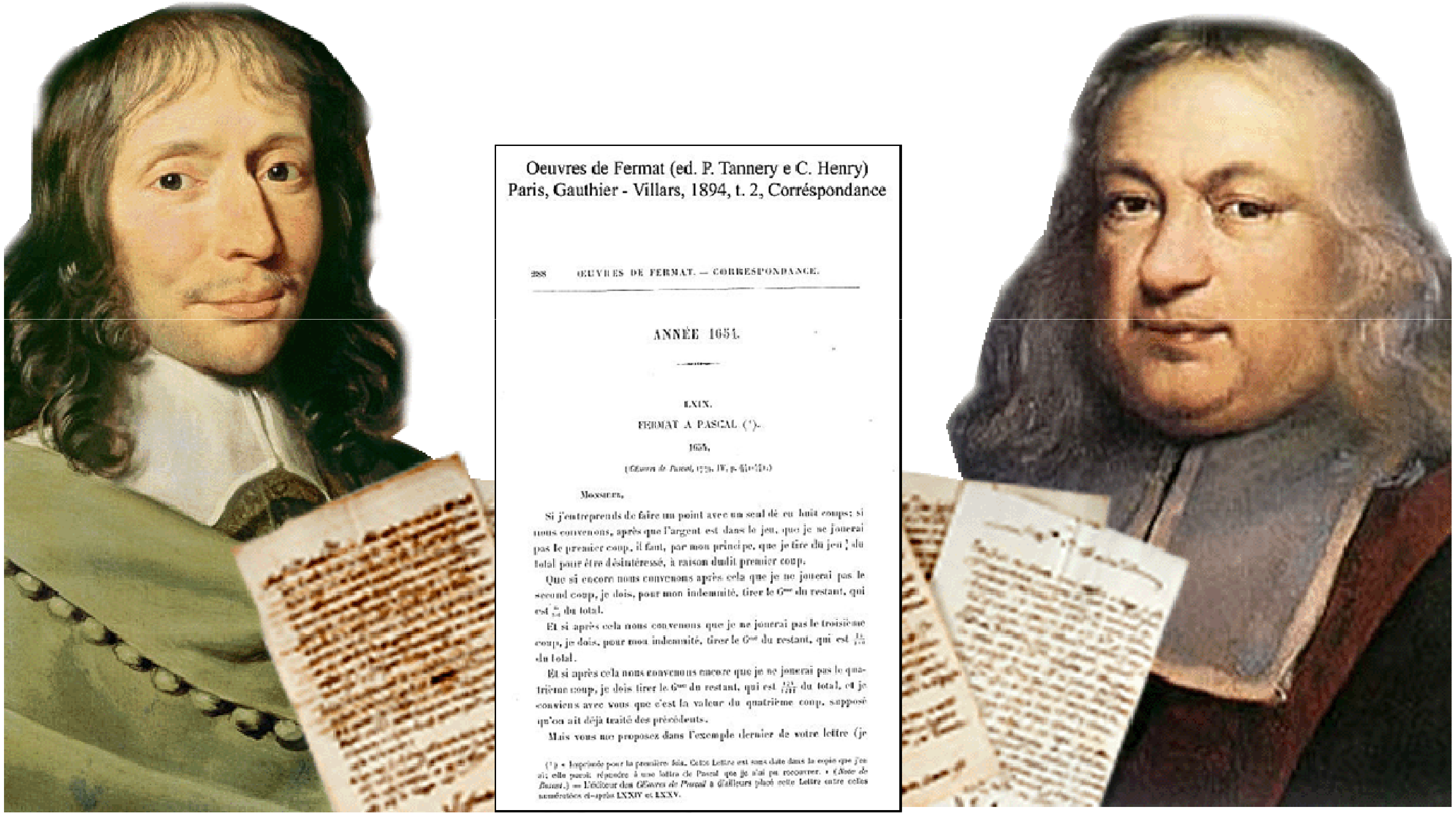
A → gli manca una partita x vincere → 1 +
B → gli mancano 3 partite x vincere → 3 =
4

RISULTATO IN FUNZIONE DELLA **POSSIBILITÀ DI VINCERE LE PARTITE SUCCESSIVE**

B arrivi a 6 partite → 0,125
A → 0,5 (0,875)

Le problème des partis

lettera di Pascal a Fermat, 29 luglio 1654



La capacità di gestire razionalmente il futuro

Lettera di Pascal a Fermat

29 luglio 1654

Pascal ragiona su un problema di *gioco incompiuto*, postogli dall'amico giocatore d'azzardo **Antoine Gombaud de Méré** che gli confida di non essere sicuro che il suo ragionamento sia corretto.

«Due giocatori, A e B, depositano ciascuno 32 monete (*pistoles*), che andranno al primo che avrà vinto 3 partite,

nell'ipotesi che entrambi i giocatori abbiano la stessa possibilità di vincere ogni singola partita.

Ma il gioco s'interrompe prima che uno dei giocatori abbia vinto 3 partite. Si chiede come deve essere ripartita la posta.»

Posta in gioco =

(3; r, t)

Gioco equo

$\boxed{A_{-a}\, B_{-b}}$

Pascal introduce una FINZIONE MATEMATICA:

identifica A come effettivamente in possesso delle 32 monete, che di fatto non ha

$\boxed{\mathbf{A_{-1}\,B_{-2}}}$

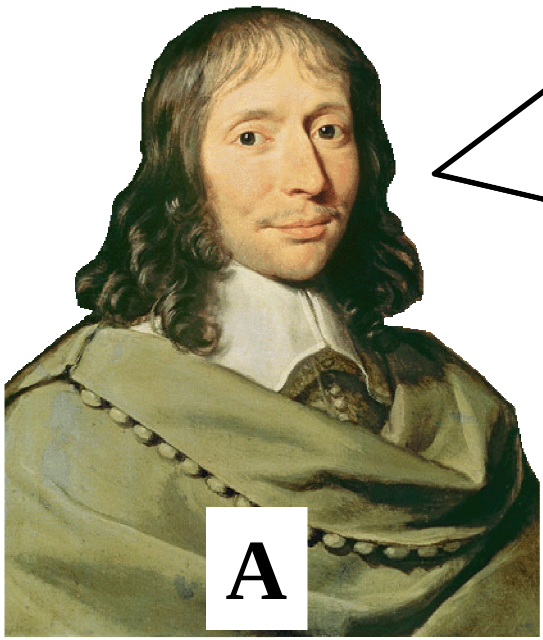
A → A vince 

ad A

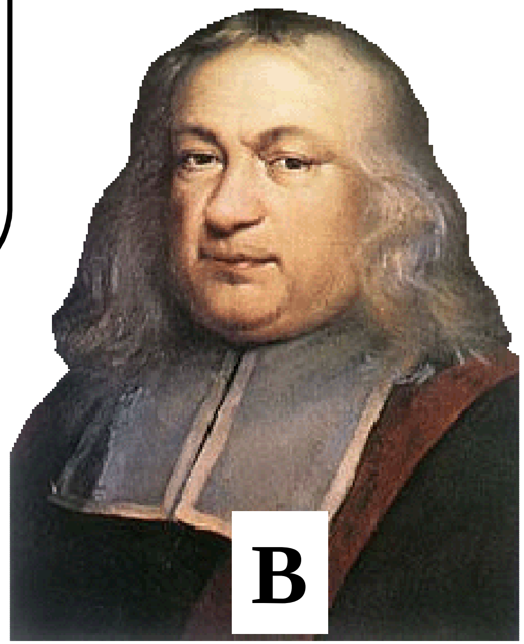
B → $A_{-1}\,B_{-1}$ 

caduno

Io sono sicuro di avere 32 monete anche se perdo, ma per le restanti 32 può darsi che le abbia io oppure tu: *le hasard est égal!*



VS



$$\boxed{A_{-1}B_{-2}} \xrightarrow{A} \text{A vince}$$

ad A

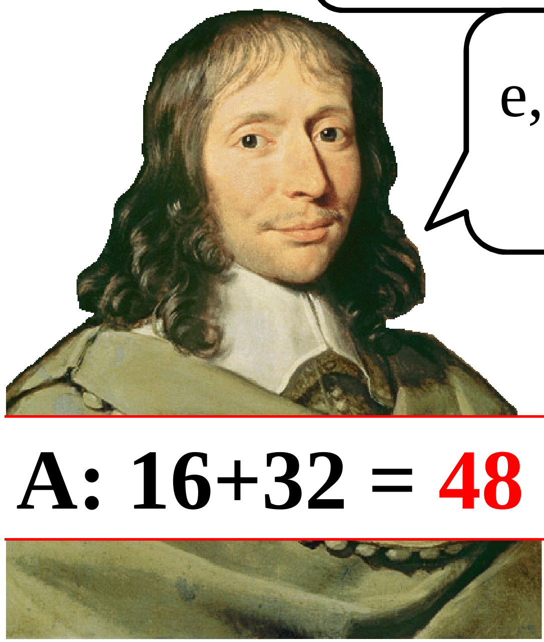
$$\boxed{A_{-1}B_{-2}} \xrightarrow{B} A_{-1}B_{-1}$$

caduno

64 - 32 = 32

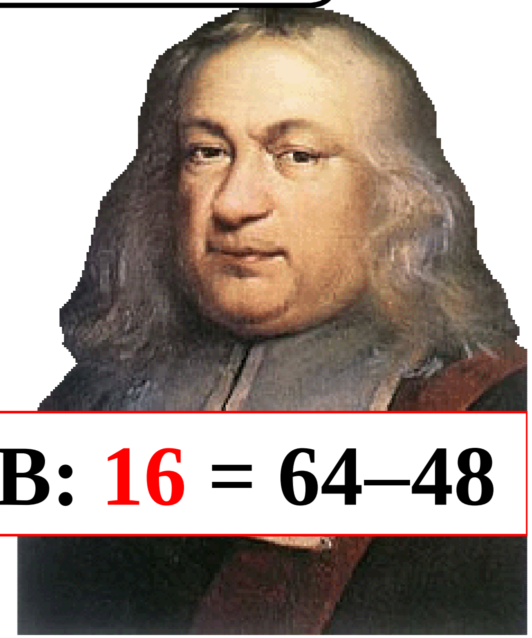
Quindi, **dividiamo** queste **32 monete restanti** in due

e, in aggiunta a queste, dammi le 32 monete *qui me sont sûres!*



A: 16+32 = 48

VS



B: 16 = 64–48

$A_{-1}\,B_{-3}$

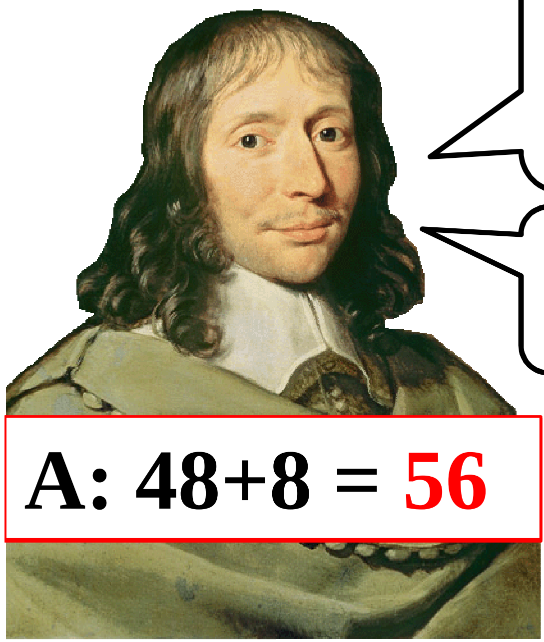
A → A vince — **64** **ad A**

B → $A_{-1}\,B_{-2}$

48 **ad A**

16 **a B**

64 – 48 = 16

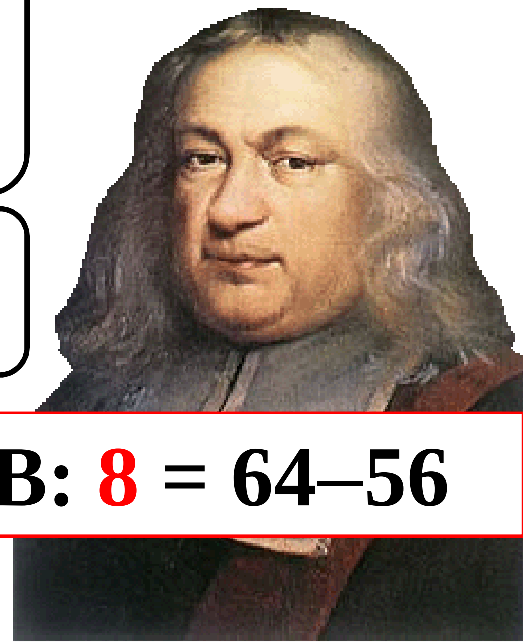


Anche se perdessi, avrei **48 monete**, che quindi mi spettano di diritto!

Spartiamoci poi a metà le **16 monete** che restano

A: 48+8 = 56

VS



B: 8 = 64–56

$A_{-2}\,B_{-3}$

A → $A_{-1}\,B_{-3}$

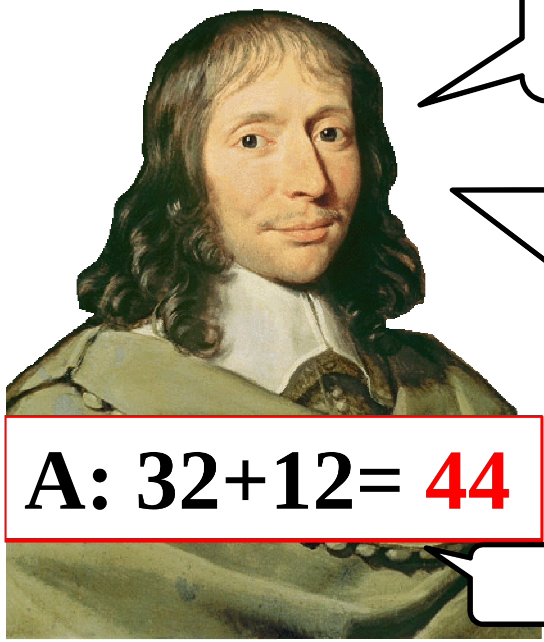
- 56 ad A
- 8 a B

B → $A_{-2}\,B_{-2}$

- 32 ad A
- 32 a B

64

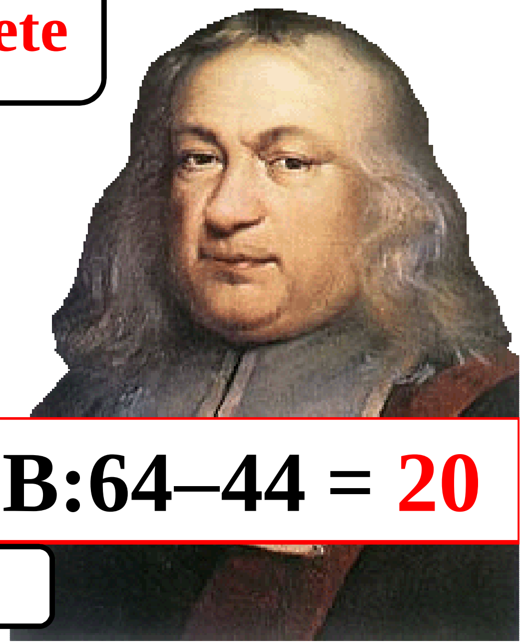
56 – 32 = 24



Anche se perdessi, avrei **32 monete**

e se vincessi **mi spetterebbero 56 monete**, dunque ci dovremo spartire a metà il resto della differenza tra queste 56 e le mie 32.

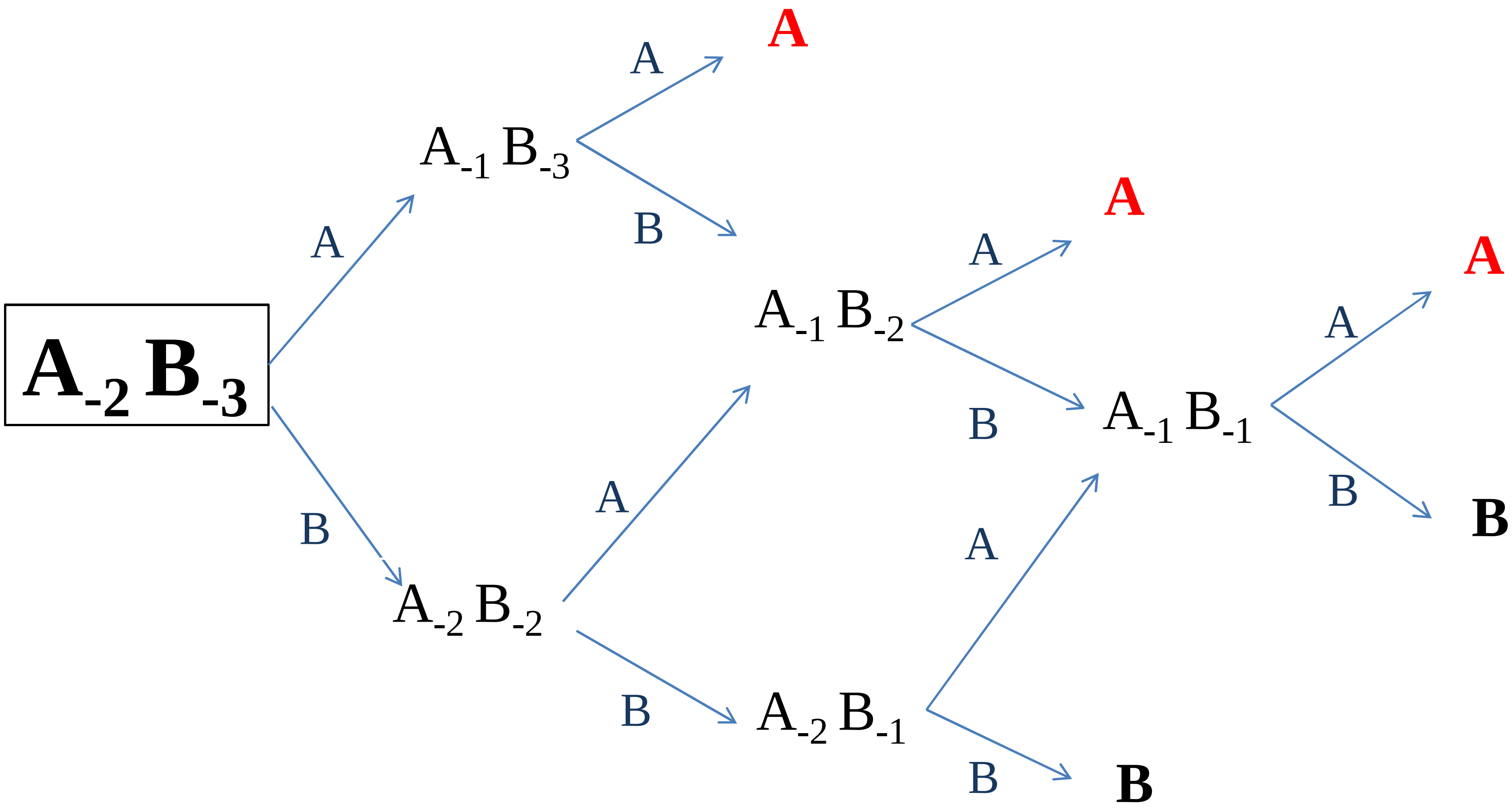
A: 32+12= 44



B:64–44 = 20

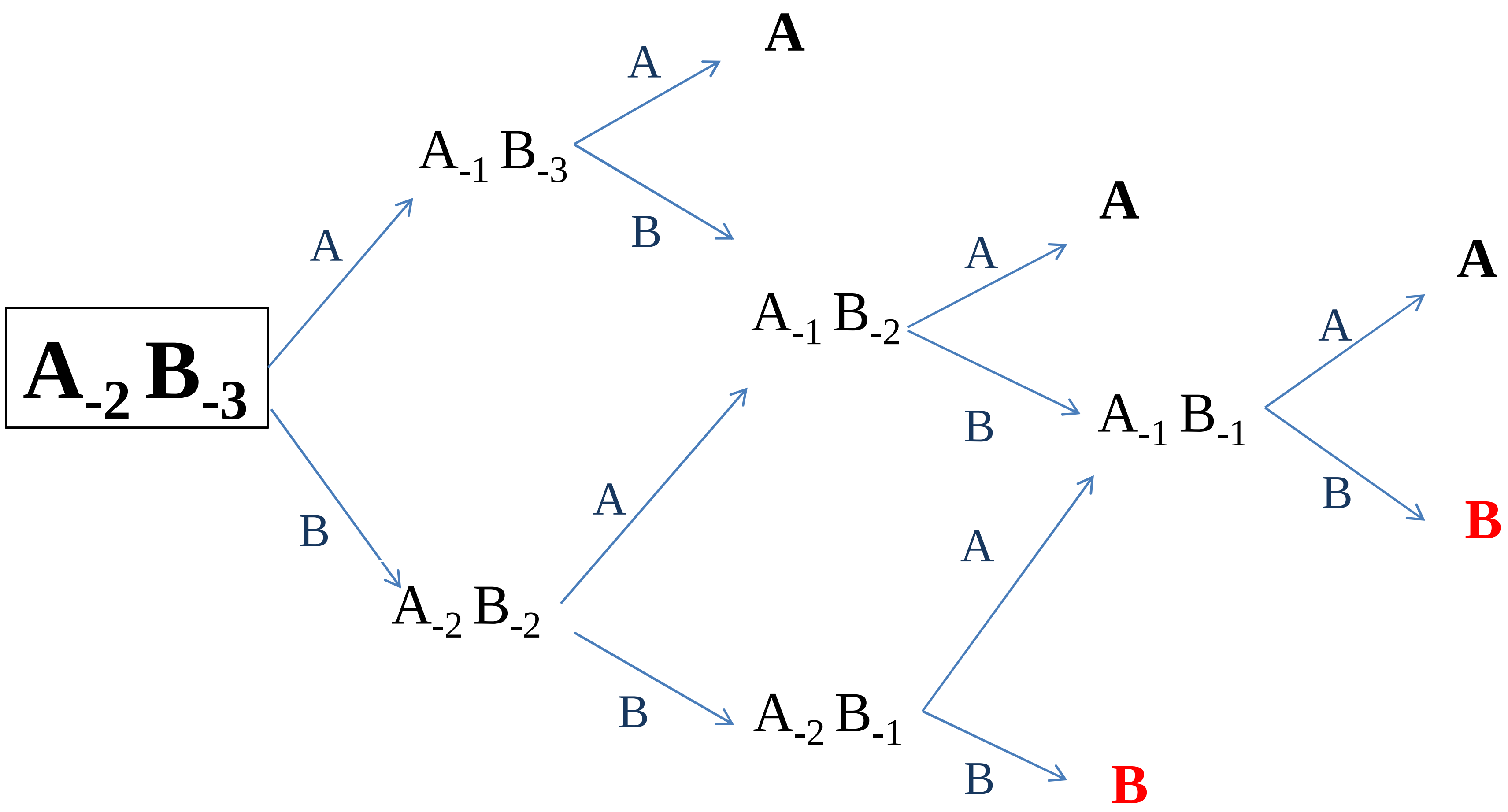
Posta in gioco divisa come **11 : 5**

Con il metodo moderno dei grafi



$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}$$

Con il metodo moderno dei grafi

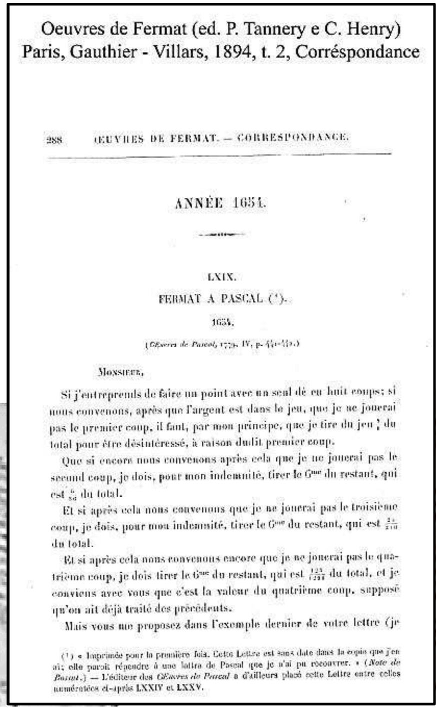


$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

PROBABILITÀ TOTALE PER EVENTI INDIPENDENTI

Fermat e *le problème des partis*

lettere fra Fermat e Pascal, agosto 1654



Oeuvres de Fermat (ed. P. Tannery e C. Henry)
Paris, Gauthier - Villars, 1894, t. 2, Corréspondance

288 ŒUVRES DE FERMAT. — CORRESPONDANCE.

ANNÉE 1654.

LXIX.

FERMAT A PASCAL (1).

1654.

(*Œuvres de Pascal*, 1779, IV, p. [illegible])

MONSIEUR,

Si j'entreprends de faire un point avec un seul dé en huit coups; si nous convenons, après que l'argent est dans le jeu, que je ne jouerai pas le premier coup, il faut, par mon principe, que je tire du jeu $\frac{1}{6}$ du total pour être désintéressé, à raison dudit premier coup.

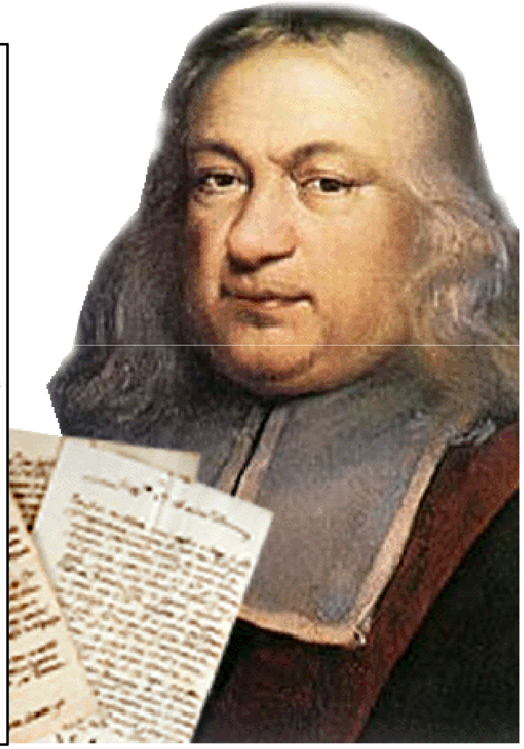
Que si encore nous convenons après cela que je ne jouerai pas le second coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6me du restant, qui est $\frac{5}{36}$ du total.

Et si après cela nous convenons que je ne jouerai pas le troisième coup, je dois, pour mon indemnité, tirer le 6me du restant, qui est $\frac{25}{216}$ du total.

Et si après cela nous convenons encore que je ne jouerai pas le quatrième coup, je dois tirer le 6me du restant, qui est $\frac{125}{1296}$ du total, et je conviens avec vous que c'est la valeur du quatrième coup, supposé qu'on ait déjà traité des précédents.

Mais vous me proposez dans l'exemple dernier de votre lettre (je

(1) « Imprimée pour la première fois. Cette Lettre est sans date dans la copie que j'en ai; elle paroît répondre à une lettre de Pascal que je n'ai pu recouvrer. » (*Note de Bossut.*) — L'éditeur des *Œuvres de Pascal* a d'ailleurs placé cette Lettre entre celles numérotées ci-après LXXIV et LXXV.



La lettera in cui Fermat espone il suo metodo è andata perduta, ma Pascal, nella risposta, ricostruisce il **metodo** del suo corrispondente e osserva quanto sia **completamente diverso** dal suo.

agosto 1654

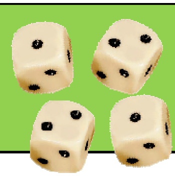
$$\boxed{A_{-2}\,B_{-3}}$$

«Voi [Fermat] dite che occorre vedere **dopo quante mani l'esito del gioco verrà definitivamente deciso»**.

Nella situazione considerata si possono fare **al massimo 4 partite per finire il gioco**, quindi occorre:

1) Vedere in quanti modi queste 4 partite possono essere distribuite fra i due giocatori
2) Calcolare quante partite portano alla vincita del primo e quante a quella del secondo
3) Dividere la posta in accordo con le proporzioni trovate.

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE
DI *n* OGGETTI A GRUPPI DI *k*



$$D^{r}_{n,k} = n^{k}$$

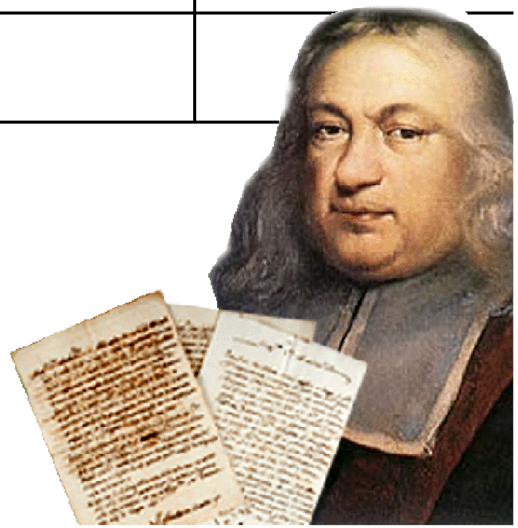
$$2^{4} = 16$$

$A_{-2}\,B_{-3}$

Cerchiamo tutte le disposizioni di 4 punti per i due giocatori?

TABELLA DEGLI ESITI POSSIBILI					
a a a a **(A)**					
a a a b **(A)**	*a a b a* **(A)**	*a b a a* **(A)**	*b a a a* **(A)**		
a a b b **(A)**	*a b a b* **(A)**	*b a a b* **(A)**	*b a b a* **(A)**	*b b a a* **(A)**	*a b b a* **(A)**
a b b b **(B)**	*b a b b* **(B)**	*b b a b* **(B)**	*b b b a* **(B)**		
b b b b **(B)**					

Indichiamo
con ***a*** la vincita di una singola partita da parte di A
con ***b*** la vincita di una singola partita da parte di B. e tra parentesi il vincitore per ogni 'gruppo di 4 partite': vincitore **(A)** o vincitore **(B)**

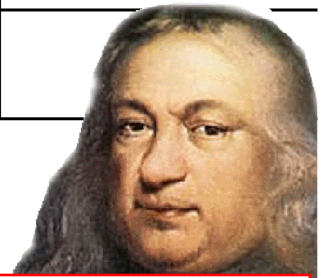


DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE DI n OGGETTI A GRUPPI DI k	$D^{r}_{n,k} = n^k$	$2^4 = 16$

$A_{-2}\,B_{-3}$

Cerchiamo tutte le disposizioni di 4 punti per i due giocatori?

TABELLA DEGLI ESITI POSSIBILI					
a a a a **(A)**					
a a a b **(A)**	*a a b a* **(A)**	*a b a a* **(A)**	*b a a a* **(A)**		
a a b b **(A)**	*a b a b* **(A)**	*b a a b* **(A)**	*b a b a* **(A)**	*b b a a* **(A)**	*a b b a* **(A)**
a b b b **(B)**	*b a b b* **(B)**	*b b a b* **(B)**	*b b b a* **(B)**		
b b b b **(B)**					

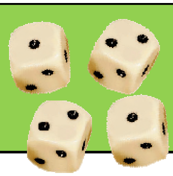


16 CASI EQUIPOSSIBILI

11 casi a favore di A (vince almeno 2 volte)
5 casi a favore di B (vince almeno 3 volte)

DIVIDIAMO LA POSTA IN PROPORZIONE
11 : 5

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE DI *n* OGGETTI A GRUPPI DI *k*



$$D^r_{n,k} = n^k$$

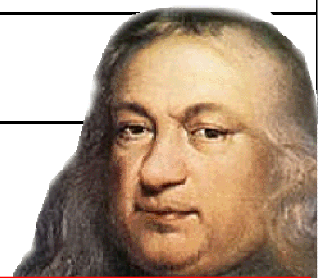
$$2^4 = 16$$

$A_{-2}\,B_{-3}$

Cerchiamo tutte le disposizioni di 4 punti per i due giocatori?

TABELLA DEGLI ESITI POSSIBILI					
*a a **a a*** **(A)**					
*a a **a b*** **(A)**	*a a b a* **(A)**	*a b a **a*** **(A)**	*b a a **a*** **(A)**		
*a a **b b*** **(A)**	*a b a **b*** **(A)**	*b a a **b*** **(A)**	*b a b a* **(A)**	*b b a a* **(A)**	*a b b a* **(A)**
a b b b **(B)**	*b a b b* **(B)**	*b b a b* **(B)**	*b b b a* **(B)**		
*b b b **b*** **(B)**					

16 CASI EQUIPOSSIBILI



11 casi a favore di A (vince almeno 2 volte)
5 casi a favore di B (vince almeno 3 volte)

DIVIDIAMO LA POSTA IN PROPORZIONE

11 : 5

Gilles Personne de ROBERVAL (1602-1675)
e il rifiuto della «*condition feinte*»

Perché considerare le partite *finte*, se uno dei giocatori può avere già vinto prima di arrivare a 4 partite?

In 2 partite	*a a* **(A)**	
In 3 partite	*a b a* *b a a* **(A)**	*b b b* **(B)**
In 4 partite	*a b b a* *b a b a* **(A)** *b b a a*	*a b b b* *b a b b* **(B)** *b b a b*

$A_{-2}\,B_{-3}$

Dividiamo allora la posta come 6 : 4

Non vedo il motivo per cui si debba avere la pretesa di fare una spartizione equa basandosi sul presupposto che si giochi per 4 partite. **Il gioco prevede che si interrompa se uno dei partecipanti ha vinto il numero prefisso di partite!**

Gilles Personne de ROBERVAL (1602-1675)
e il rifiuto della «*condition feinte*»

Perché considerare le partite *finte*, se uno dei giocatori può avere già vinto prima di arrivare a 4 partite?

In 2 partite	*a a*	**(A)**		
In 3 partite	*a b a* *b a a*	**(A)**	*b b b*	**(B)**
In 4 partite	*a b b a* *b a b a* *b b a a*	**(A)**	*a b b b* *b a b b* *b b a b*	**(B)**

$\boxed{\mathbf{A}_{-2}\,\mathbf{B}_{-3}}$

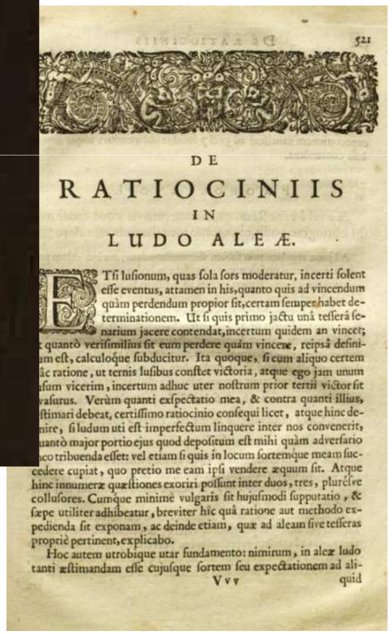
Dividiamo la posta
come 6 : 4

NON SONO CASI EQUIPOSSIBILI

Fermat opera con una ***finzione matematica***: considera partite aggiuntive fittizie, in modo che ogni gioco consista di 4 partite e che tutti i casi siano così equipossibili.

Christian Huygens
(1629-1695)

Jacob Bernoulli
(1654-1705)



521

DE

RATIOCINIIS

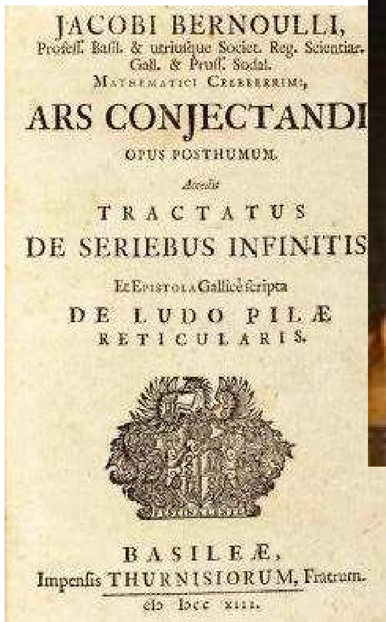
IN

LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ defini... m eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem ...âc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum ...ſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit ...vaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, ...ſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc de... ...nire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, ...uantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario ...co tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad ali-

Vvv quid



JACOBI BERNOULLI,

Profeſſ. Baſil. & utriuſque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruſſ. Sodal.

MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,

OPUS POSTHUMUM.

Accedit

TRACTATUS

DE SERIEBUS INFINITIS,

Et EPISTOLA Gallicè ſcripta

DE LUDO PILÆ

RETICULARIS.

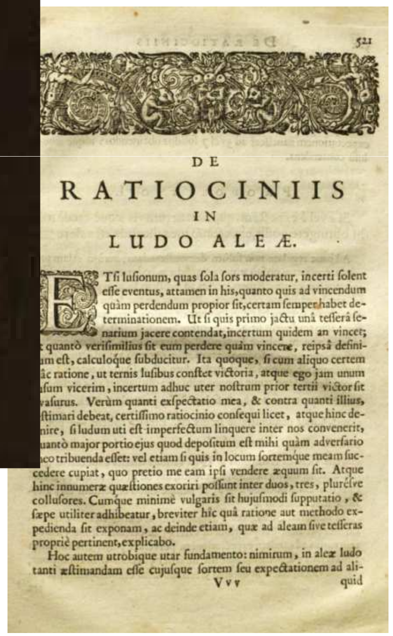
BASILEÆ,

Impenſis THURNISIORUM, Fratrum.

clↄ Iↄcc xiii.

Generalizzare il problema

Christian Huygens
(1629-1695)



521

DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETſi luſionum, quas ſola ſors moderatur, incerti ſolent eſſe eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior ſit, certam ſemper habet determinationem. Ut ſi quis primo jactu unâ teſſerâ ſenarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; quantò veriſimilius ſit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum eſt, calculoque ſubducitur. Ita quoque, ſi cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis luſibus conſtet victoria, atque ego jam unum luſum vicerim, incertum adhuc uter noſtrum prior tertii victor ſit evaſurus. Verùm quanti exſpectatio mea, & contra quanti illius, æſtimari debeat, certiſſimo ratiocinio conſequi licet, atque hinc definire, ſi ludum uti eſt imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depoſitum eſt mihi quàm adverſario meo tribuenda eſſet: vel etiam ſi quis in locum ſortemque meam ſuccedere cupiat, quo pretio me eam ipſi vendere æquum ſit. Atque hinc innumeræ quæſtiones exoriri poſſunt inter duos, tres, pluréſve colluſores. Cumque minimè vulgaris ſit hujuſmodi ſupputatio, & ſæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda ſit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam ſive teſſeras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æſtimandam eſſe cujuſque ſortem ſeu expectationem ad aliquid

Vvv

Proposizione I – *De ratiociniis in ludo aleae*

Se con uguale facilità posso ottenere una somma *a* oppure una somma *b*, allora la mia ***speranza matematica* è** $\dfrac{a+b}{2}$

Speranza matematica

$A_{-1}B_{-1}$ $\xrightarrow{A}$ **A vince** — ½ a ; $\xrightarrow{B}$ **B vince** — ½ a

$$s.m._A = \frac{1}{2}a$$

$$s.m._B = \frac{1}{2}a$$

$A_{-1}B_{-2}$ $\xrightarrow{A}$ **A vince** — a ; $\xrightarrow{B}$ $A_{-1}B_{-1}$ — ½ a

$$s.m._A = \frac{3}{4}a$$

$$s.m._B = \left(\frac{1}{2}\right)^2 a$$

$A_{-1}B_{-3}$ $\xrightarrow{A}$ **A vince** — a ; $\xrightarrow{B}$ $A_{-1}B_{-2}$ — $^3/_4\, a$

$$s.m._A = \frac{7}{8}a$$

$$s.m._B = \left(\frac{1}{2}\right)^3 a$$

$A_{-1}B_{-4}$ $\xrightarrow{A}$ **A vince** — a ; $\xrightarrow{B}$ $A_{-1}B_{-3}$ — $^7/_8\, a$

$$s.m._A = \frac{15}{16}a$$

$$s.m._B = \left(\frac{1}{2}\right)^4 a$$

...

...

$A_{-1}B_{-n}$

$$s.m._A = \frac{2^n - 1}{2^n}a$$

$$s.m._B = \left(\frac{1}{2}\right)^n a$$

$A_{-x}\,B_{-y}$

Speranza matematica di A

$$f(x,y) = \frac{f(x-1,y)+f(x,y-1)}{2}$$

$$f(1,n) = \frac{2^n-1}{2^n}$$

$$f(n,1) = \frac{1}{2^n}$$

N° di partite mancanti a B (y)

y \ x	1	2	3	4	5	6	7
7	$\frac{127}{128}$	$\frac{247}{256}$	$\frac{466}{512}$	$\frac{848}{1024}$	$\frac{1486}{2048}$	[illegible]	[illegible]
6	$\frac{63}{64}$	$\frac{120}{128}$	$\frac{219}{256}$	$\frac{382}{512}$	$\frac{638}{1024}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1586}{4096}$
5	$\frac{31}{32}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{99}{128}$	$\frac{163}{256}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{386}{1024}$	$\frac{562}{2048}$
4	$\frac{15}{16}$	$\frac{26}{32}$	$\boxed{\frac{42}{64}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{93}{256}$	$\frac{130}{512}$	$\frac{176}{1024}$
3	$\frac{7}{8}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{22}{64}}$	$\frac{29}{128}$	$\frac{37}{256}$	$\frac{46}{512}$
2	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{8}{128}$	$\frac{9}{256}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$

0

N° di partite mancanti ad A

Conclusioni

- Avviare **percorsi di scoperta**, con la guida e il supporto della storia e di testi originali, affrontabili lungo l'intero curriculum secondario

- Dare **dignità agli errori** degli studenti tramite gli «scivoloni» dei grandi matematici

- Dare valore ai momenti di **confronto tra strategie** risolutive, sia all'interno della classe, sia con la storia stessa

- **Investire tempo** in attività che puntano al consolidamento di competenze strategiche e tecniche tramite contesti significativi

Bibliografia essenziale

Bottazzini U., Freguglia P., Toti Rigatelli L., *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni Editore, 1992

Devlin K., *The unfinished game. Pascal, Fermat, and the Seventeenth Century letter that made the world modern*, New York, Basic Books, 2008

Dupont P., Roero C.S., *Il trattato "De ratiociniis in ludo aleae" di Christiaan Huygens con le "Annotationes" di Jacob Bernoulli*, Memorie dell'Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze FMN, s. V, v. 8, 1984

Hald A., *A history of Probability and Statistics and their Applications before 1750*, New Jersey, Wiley-Interscience, 2003

Tannery P., Henry C., *Oeuvres de Fermat*, Paris, Gauthier-Villars, 1894; t.2, Corréspondance

Todhunter I., *A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace*, New York, Chelsea Publishing Company, 1949

Fonti

Cardano G., *De Ludo Aleae*, in *Opera Omnia*, v. 1, Lione, 1663, p. 262-276 [formato digitale: http://filolinux.dipafilo.unimi.it/cardano/testi/opera.html]

Pascal B., *Oeuvres complètes de …*, Paris, Hachette, vol. 2, 1858; 1954, p. 77-90