Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica

La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori

TERZO CONVEGNO NAZIONALE
L'AQUILA 15 - 17 Ottobre 2015
Dipartimento di Matematica Università dell'Aquila

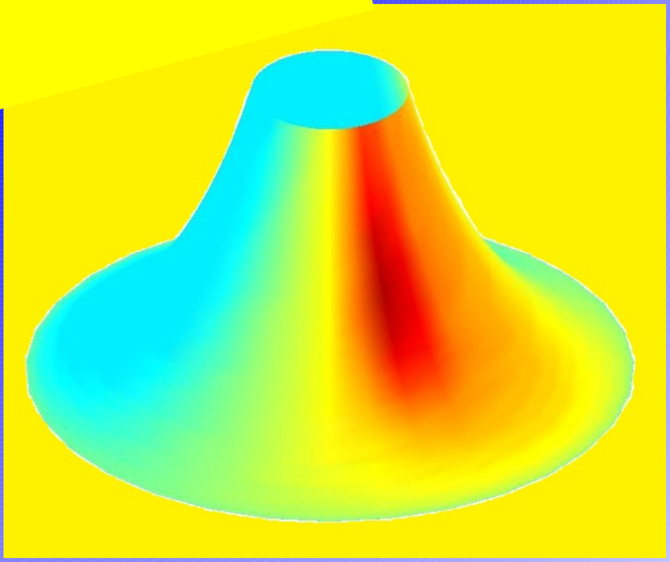
Il matematico ubriaco e la bottiglia

Approccio semiserio alle geometrie possibili

prof. Sergio Bastianelli
IIS "V. Moretti" Roseto degli Abruzzi

Sunto
Nella prima parte della relazione viene sceneggiato un dialogo immaginario tra il matematico e la bottiglia. L'ubriaco inveisce e denigra il vuoto contenitore poiché ha ormai perso la sua funzione. Ma la *sventurata risponde*: < …, la mia essenza non è la mia funzione ma è la mia forma; anche una forma così usuale racchiude almeno tre superfici, modelli di geometrie possibili … >. La bottiglia si ingrandisce e si seziona in tre parti (cilindro, segmento sferico a due basi e pseudosfera) per presentare la geometria euclidea, ellittica e iperbolica. Nella seconda parte vengono illustrate come le tematiche delle geometrie non euclidee sono state utilizzate in percorsi d'esame, scambi culturali e lezioni occasionali.

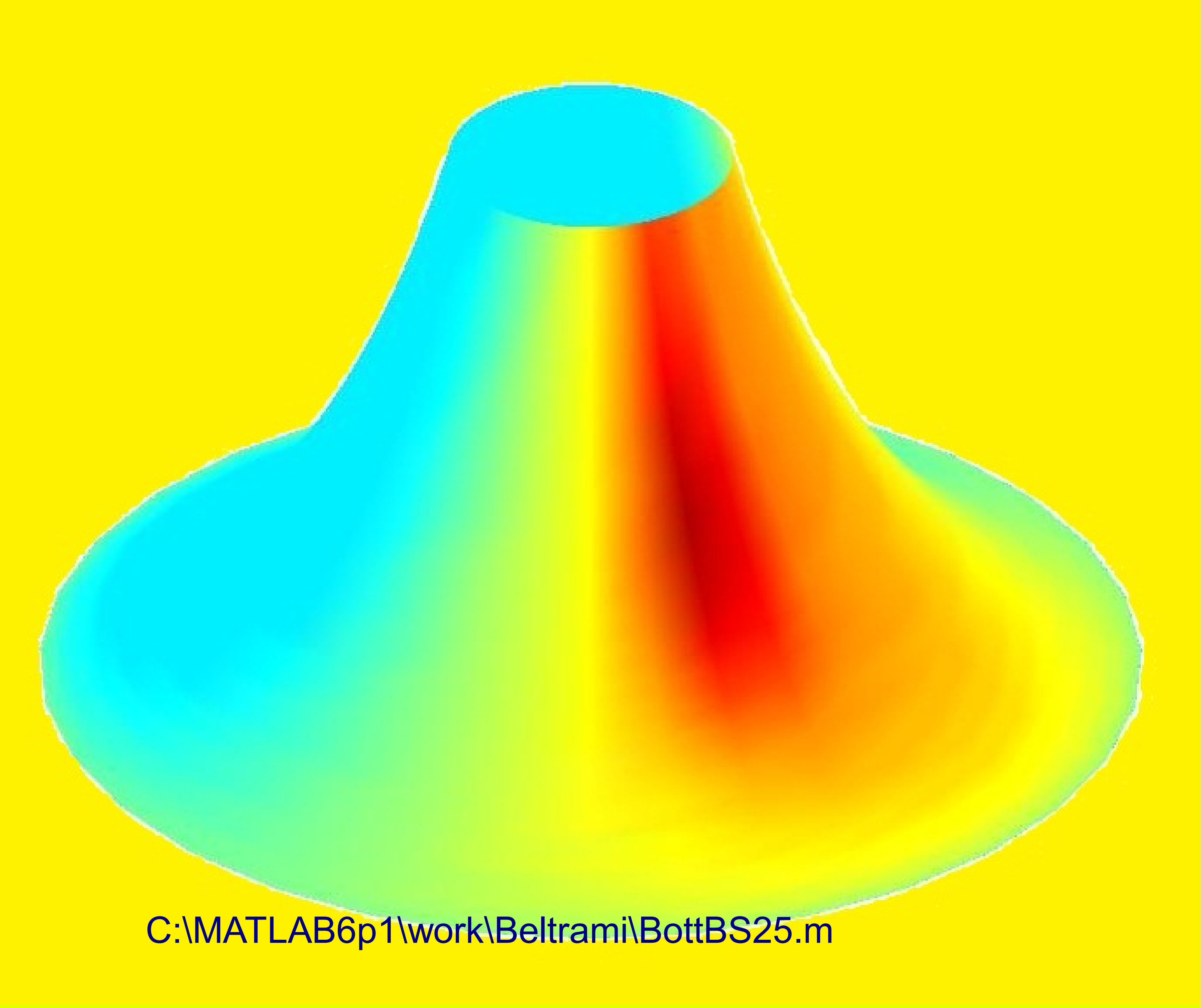
Il matematico ubriaco e la bottiglia

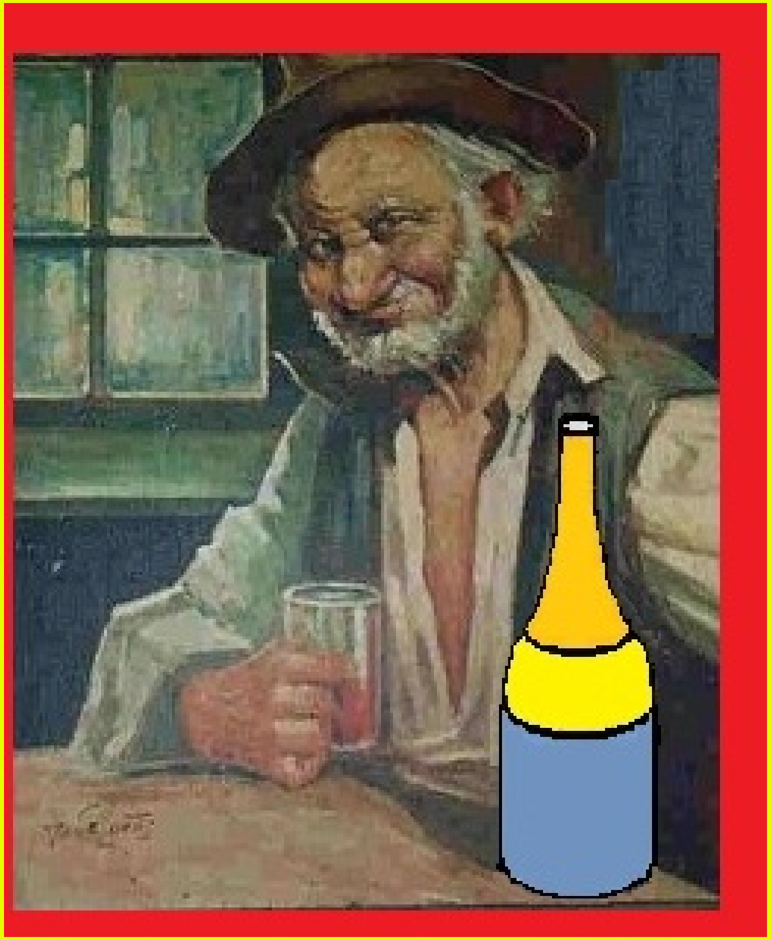


Approccio semiserio alle geometrie possibili

by ©viscidicorsoci

Come ogni soubrette che si rispetti, la bottiglia inizialmente mostra solo una parte del proprio corpo ...





Il matematico ubriaco e la bottiglia

Teomondo Scrofalo (…)

Immaginiamo una fredda serata invernale, un misero professore di matematica seduto con il bicchiere di vino in mano ed una bottiglia sul tavolo. …

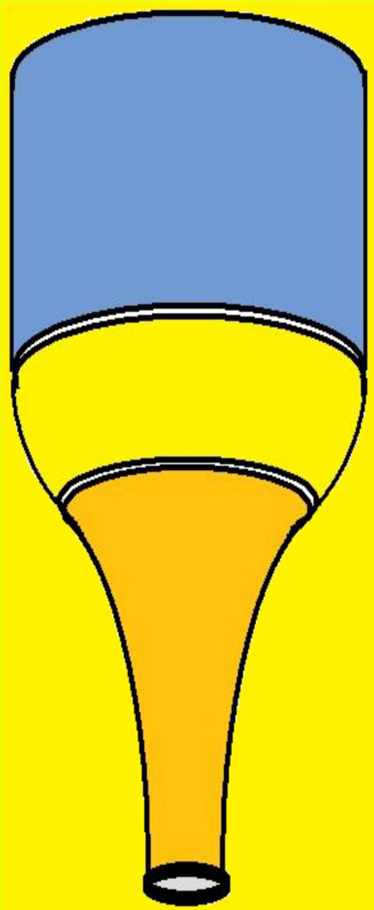
… . Amaro e noia
La vita, altro mai nulla; e fango è il mondo. (…)

Lo stipendio avaro, l'indifferenza degli alunni, la pretesa di un genitore di rendere la disciplina "interessante", le conoscenze e le competenze, il dirigente, il comitato di svalutazione, FIS, BES, RAV, CLIL, MOF, POF, PTOF, la pensione che si allontana alla velocità della luce, la legge n. 1101011 costituita da un unico (!) articolo, il sindacato, la moglie, i figli e il cane, …,

il Faraone (...) e le CAVALLETTE (…) !!!

Ecco un elenco di validi motivi che
inducono il matematico ad alzare il gomito.

Un bicchiere tira l'altro e la bottiglia finisce in fretta.



L'ubriaco rovescia la bottiglia e scuotendola osserva le ultime gocce di vino cadere; … la poggia e la fissa con insistenza:

< Stupida bottiglia, sei un oggetto inutile! Poco fa contenevi del buon vino, adesso che ti ho vuotata non hai alcun valore > . ...

< Tu sei un contenitore, vuota a cosa servi? >

Il matematico si stravacca sulla sedia guardandola ancora con disprezzo.

LA SVENTURATA RISPOSE (…):

< Matematico ubriacone! Come ti permetti? Sei tu quello inutile! Il mio profilo è perfetto, non contengo solo vino, … , guardami meglio piuttosto.

È vero: la mia funzione è quella di essere un semplice contenitore ma **la mia essenza è la mia FORMA.**

Anche una forma così usuale racchiude almeno tre superfici, modelli di geometrie possibili > .

La bottiglia si decompone in tre pezzi: cilindro, segmento sferico a due basi ed una porzione di pseudosfera, …

La bottiglia si decompone in tre pezzi:

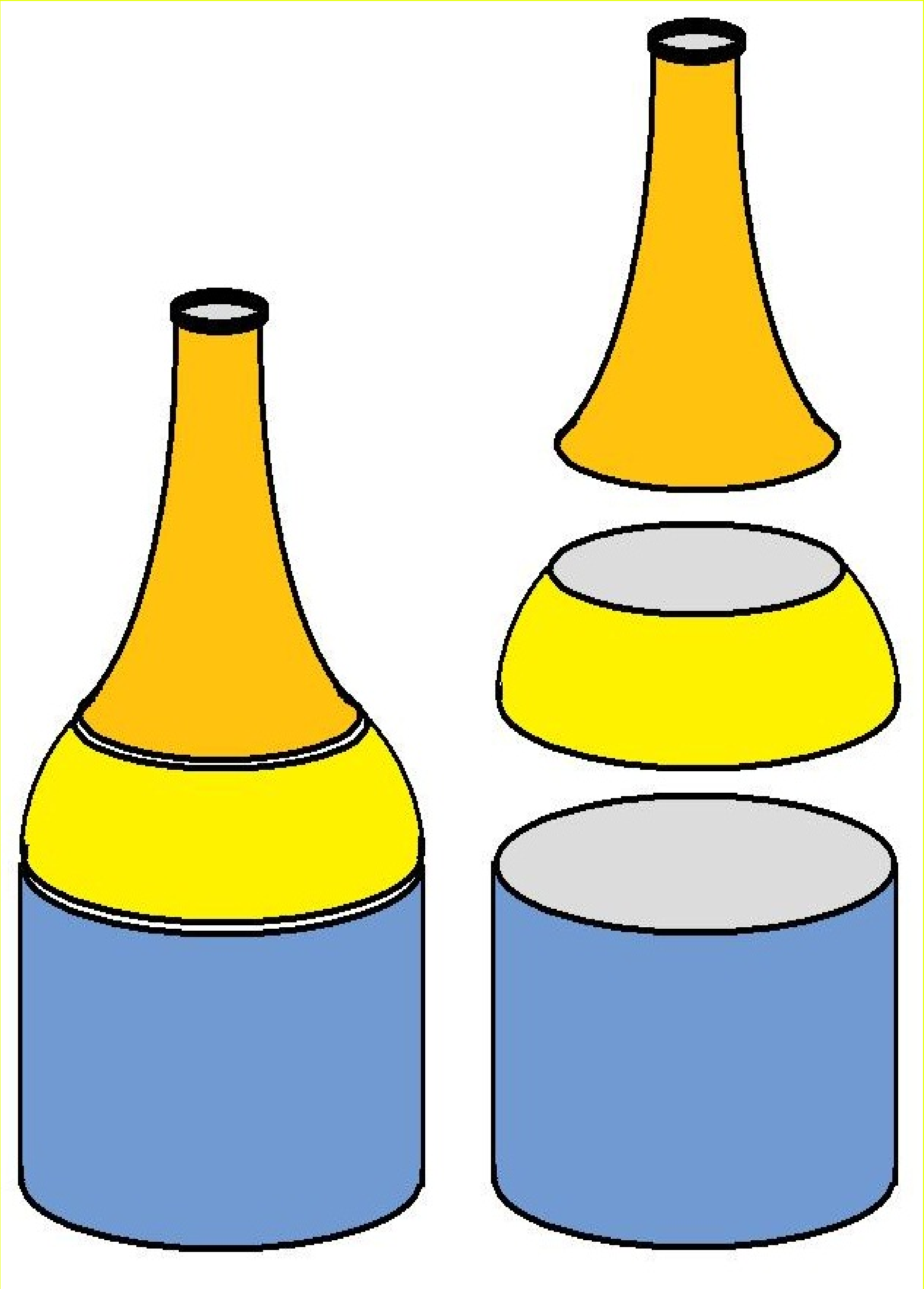
CILINDRO,

SEGMENTO SFERICO

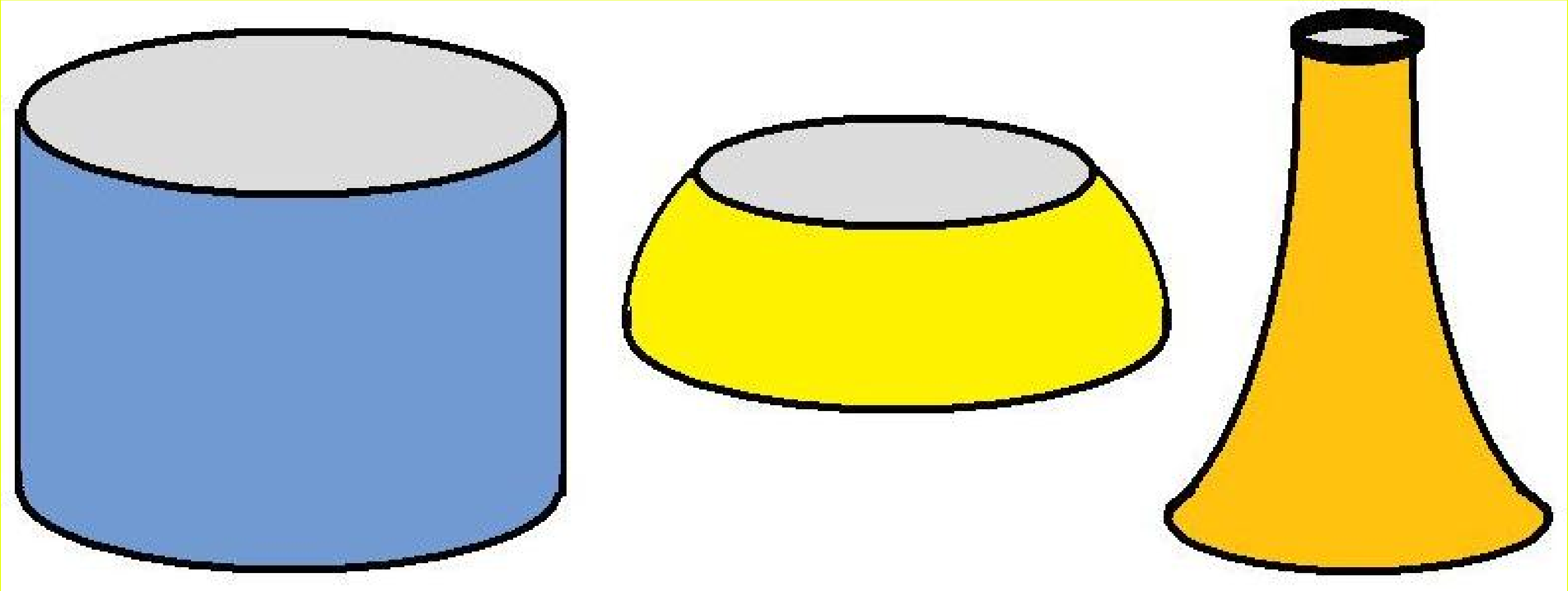
a due basi

ed una porzione di

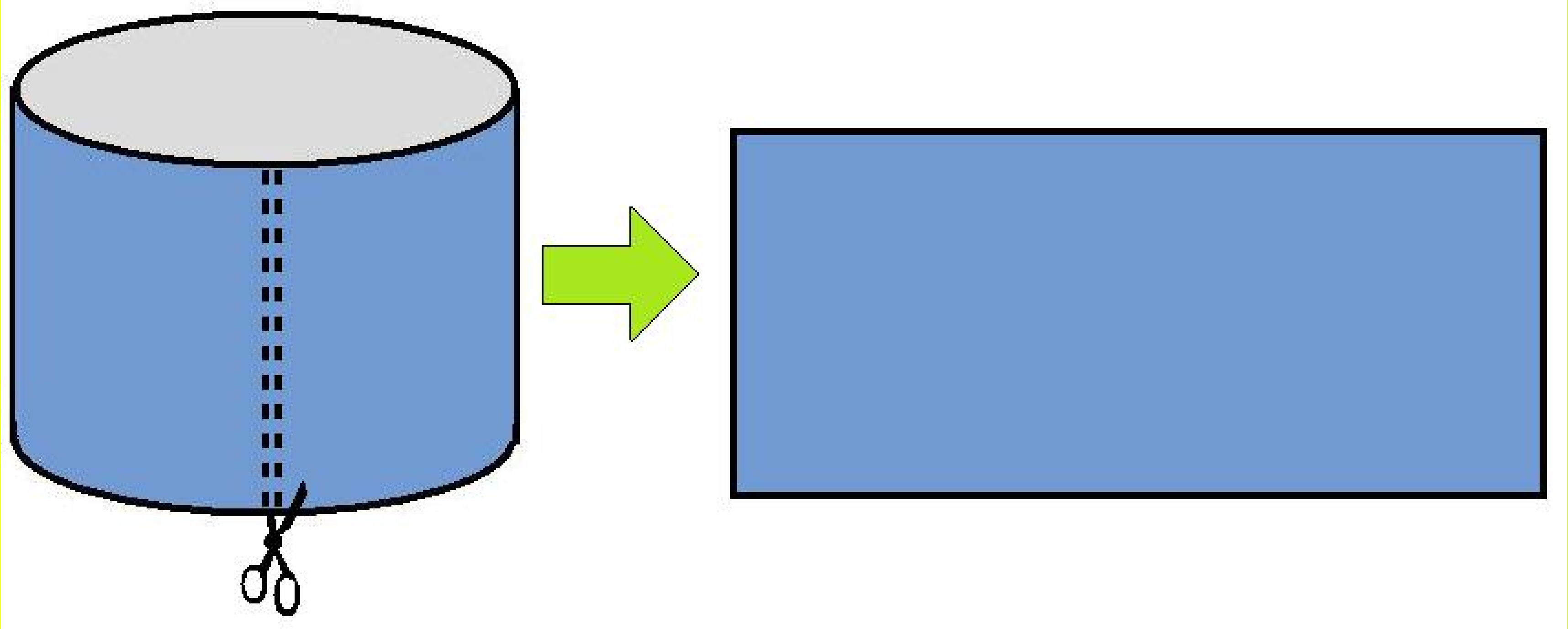
PSEUDOSFERA.



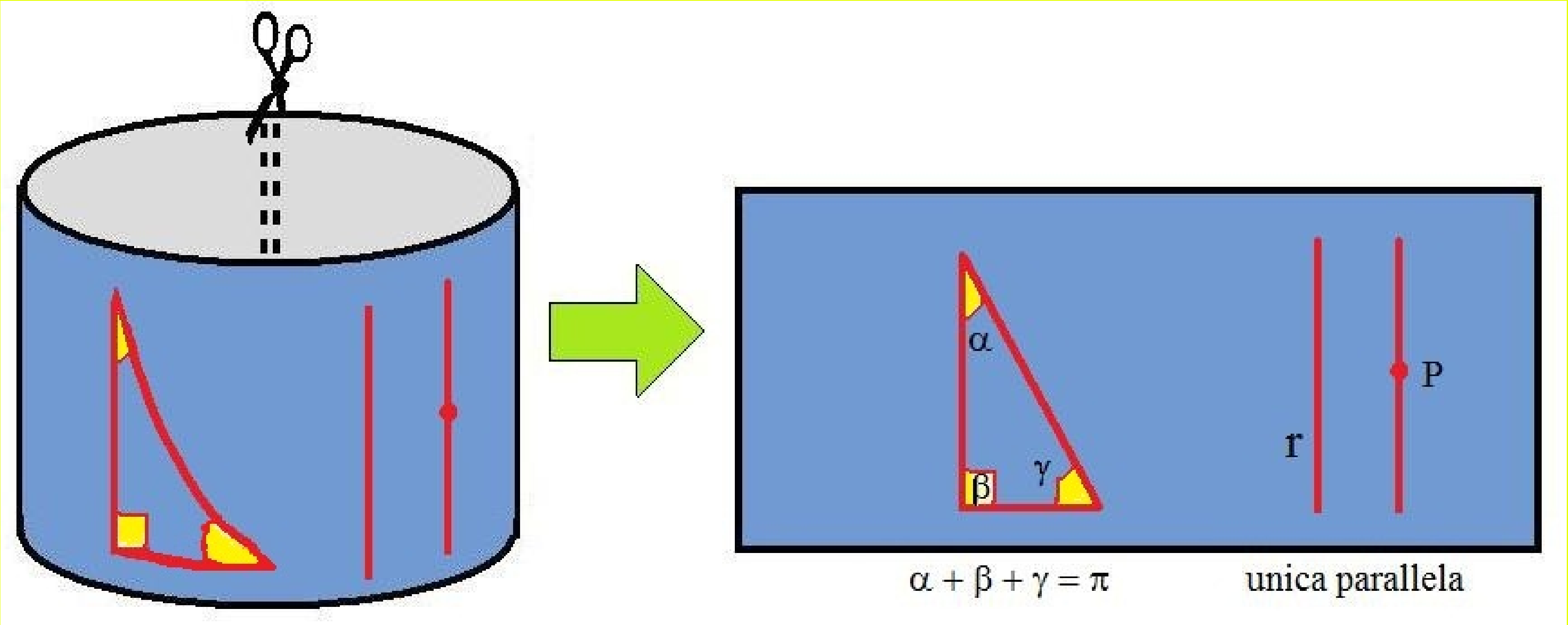
Geometria Euclidea **_Geometria Ellittica_** **_Geometria Iperbolica_**



< Matematico, guarda la mia forma! La parte cilindrica è un modello per la geometria euclidea, quella ottenuta da una sfera individua la geometria ellittica mentre il mio collo, un imbuto rovesciato, è una pseudosfera prototipo della geometria iperbolica > .

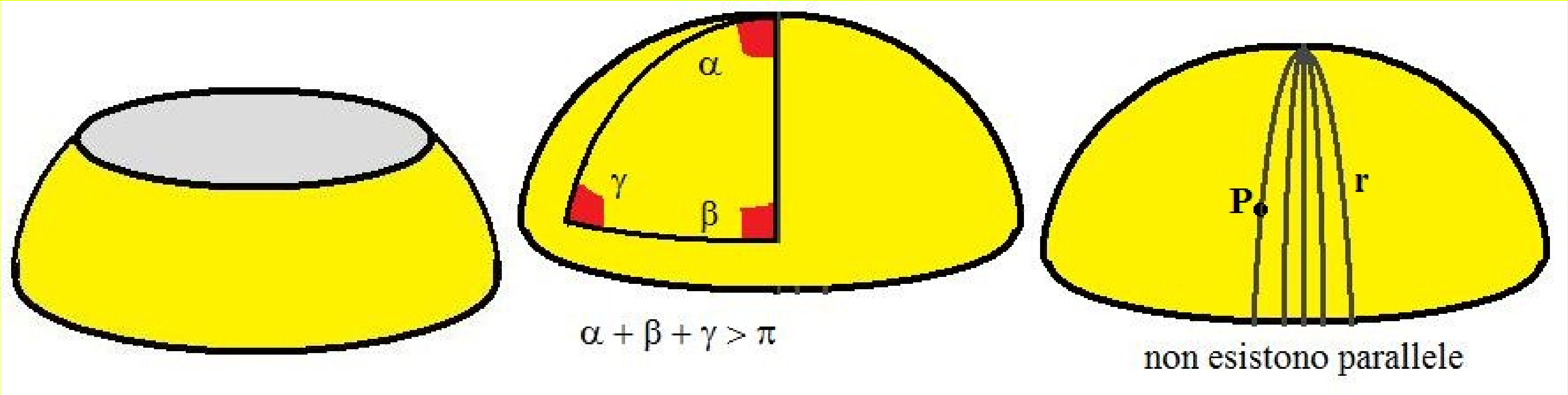


< La parte cilindrica ha una curvatura apparente: tagliando lungo una generatrice il cilindro si trasforma con continuità ed in modo isometrico in pezzo di piano.
La geometria del cilindro è l’usuale geometria del piano euclideo e di ogni superficie a curvatura nulla > .



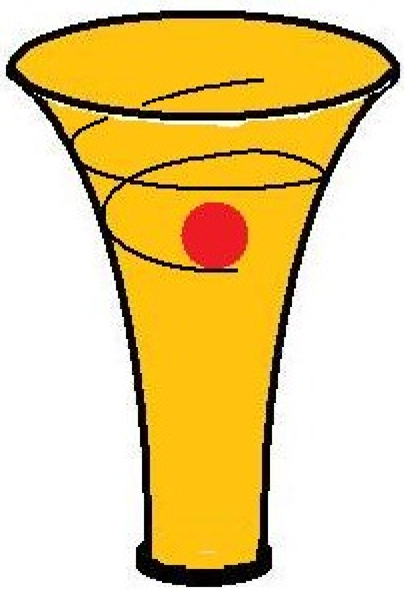
< Guarda cosa accade sul cilindro e sul piano:
la somma degli angoli interni di un triangolo è un angolo piatto e la parallela condotta da un punto P esterno ad una retta r è unica > .

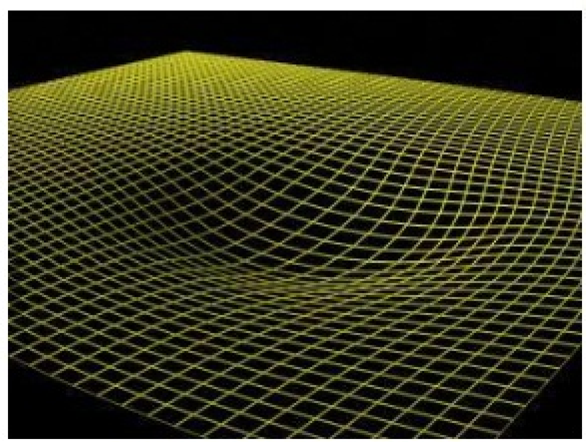
< La mia porzione di sfera ha curvatura positiva ed è diversa da una regione piana. Prova ad appiattire la buccia di un'arancia: ci riesci solo solo se la laceri. La mia geometria ellittica è la geometria della superficie sferica e di tutte le superfici a curvatura positiva.



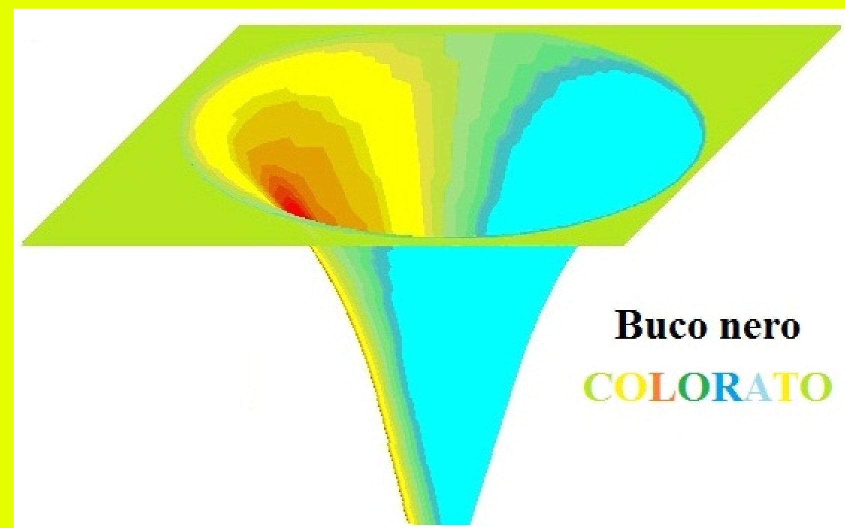
< Osserva un mio triangolo: la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto. I meridiani che sono le mie rette hanno sempre un punto in comune. Nella geometria ellittica non ci sono rette parallele > .

< Il mio collo è una una porzione di pseudosfera che ha una curvatura negativa. Sono diversa dal piano e dalla sfera. La mia curvatura negativa o se preferisci, il mio essere imbuto, mi rende un "buco nero" [la bottiglia rovescia il suo collo e vi getta una pallina che viene catturata …]. … La mia geometria iperbolica è quella che ha lo spazio fisico deformato dalle masse > .

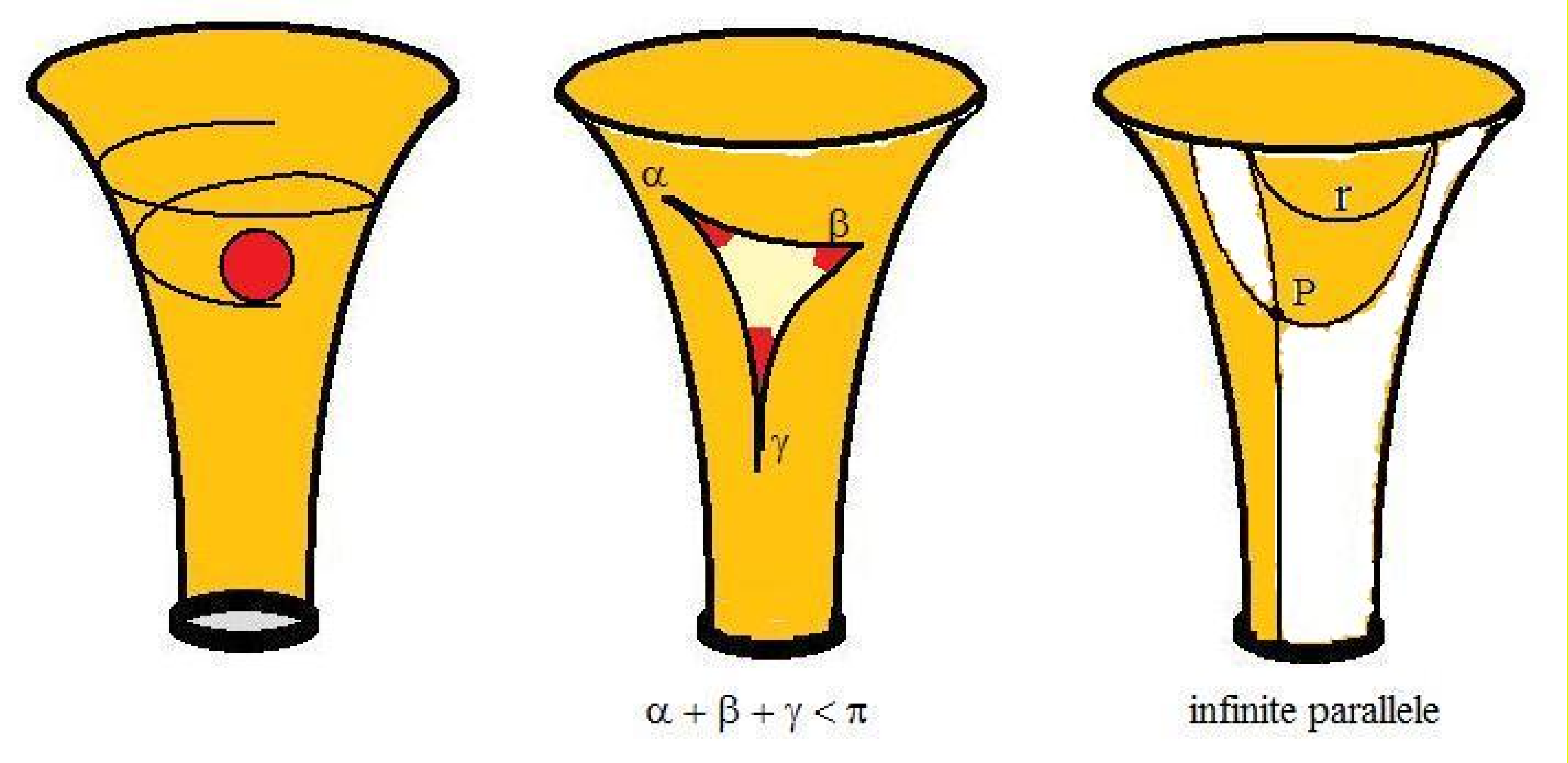




Spazio curvato per la presenza di una massa



< Matematico ubriaco, guarda un mio triangolo! La somma degli angoli interni è minore di un angolo piatto. … Nella mia geometria ci sono infinite rette parallele > .



La bottiglia si ricompone e l’ubriaco si stropiccia gli occhi esclamando: < Devo smettere di bere! > .

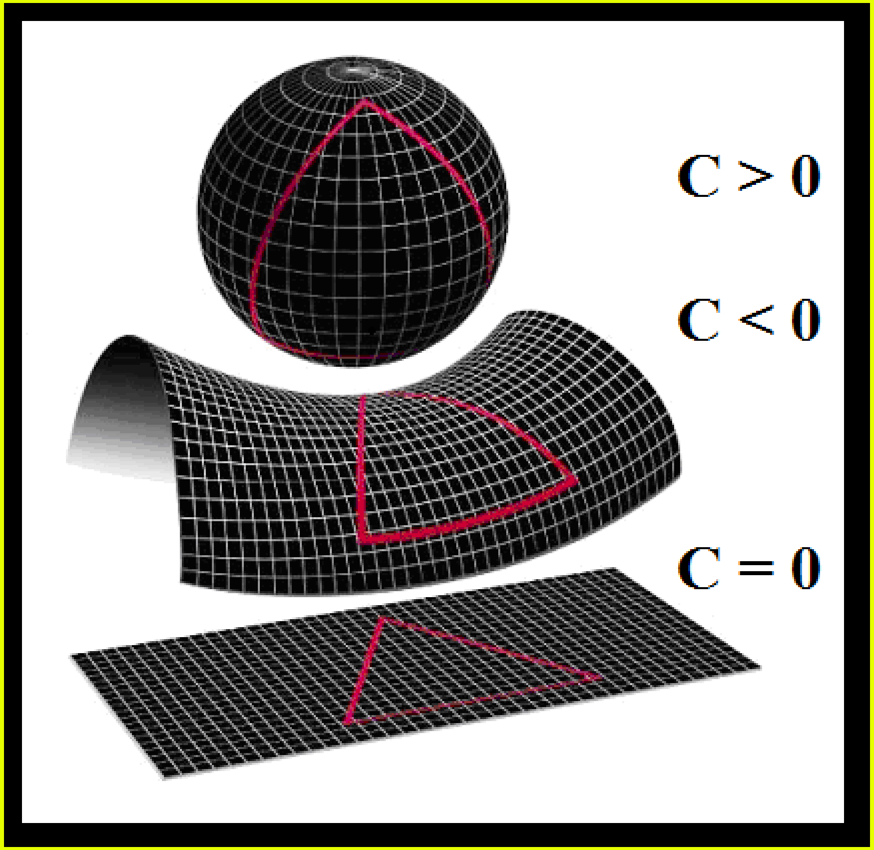
Morale della bottiglia (1°)

Le tre superfici con curvatura positiva, negativa e nulla individuano tre diverse geometrie:

Ellittica,

Iperbolica,

Euclidea.



Morale della bottiglia (2°) … Regina e Serva ...

La matematica è un ***Gioco assiomatico-deduttivo*** ed è diversa dalle scienze sperimentali. Comunque le idee, le formule e le forme della matematica, magicamente, offrono dei "***Modelli***" che permettono alle altre scienze di interpretare e di interagire con la realtà.

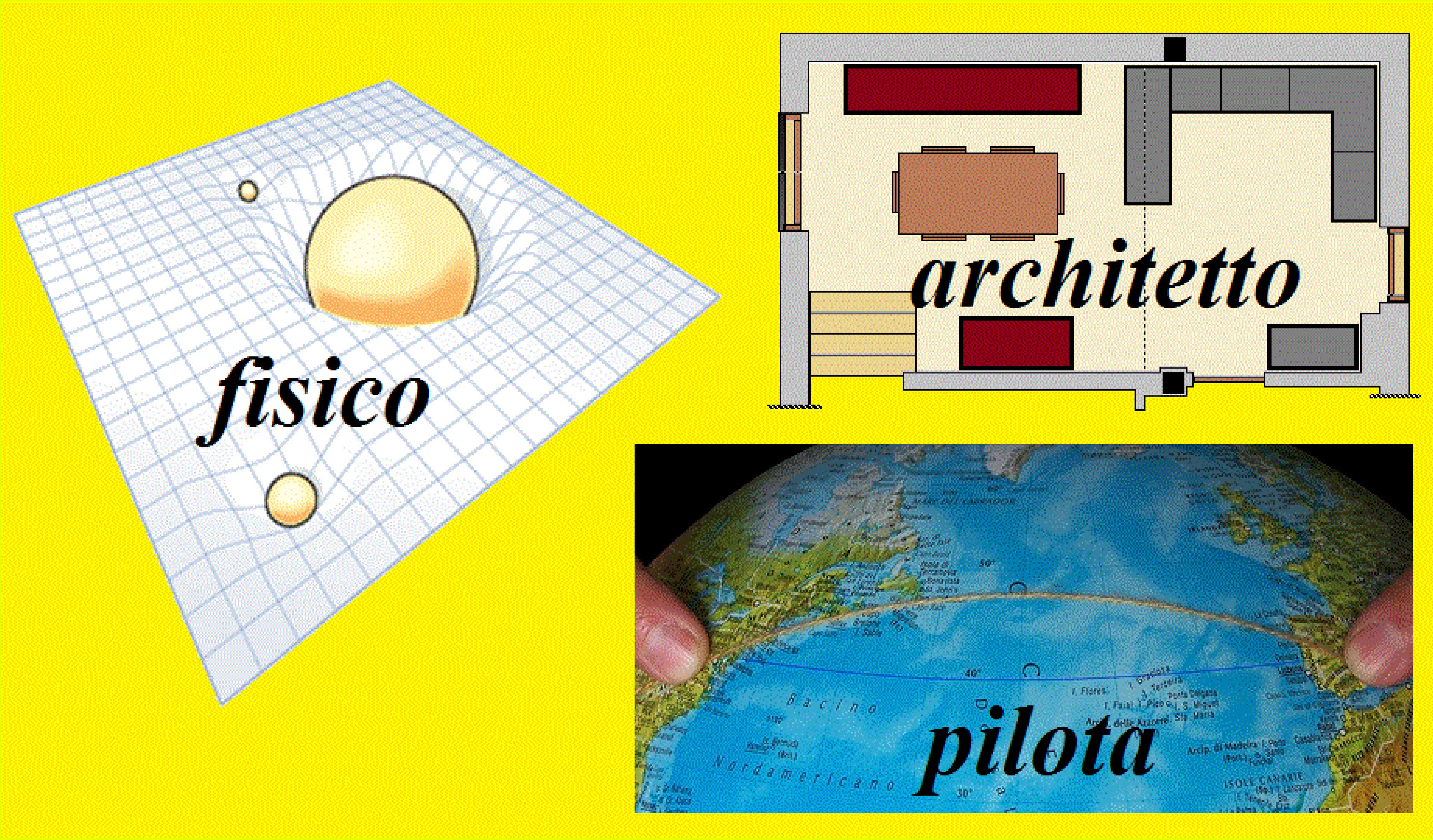
I modelli di queste geometrie sono quotidianamente utilizzati:

Localmente, sulla terra, l'architetto Amedeo usa la geometria euclidea per costruire e arredare.

Sempre sulla terra, per grandi distanze, il pilota Guido Wrigth si avvale della geometria ellittica per percorrere, in economia, la tratta Philadelphia-Madrid (40° parallelo) .

Nell'universo, il fisico GIOVANNI usa la geometria iperbolica per descrivere il cronotopo.

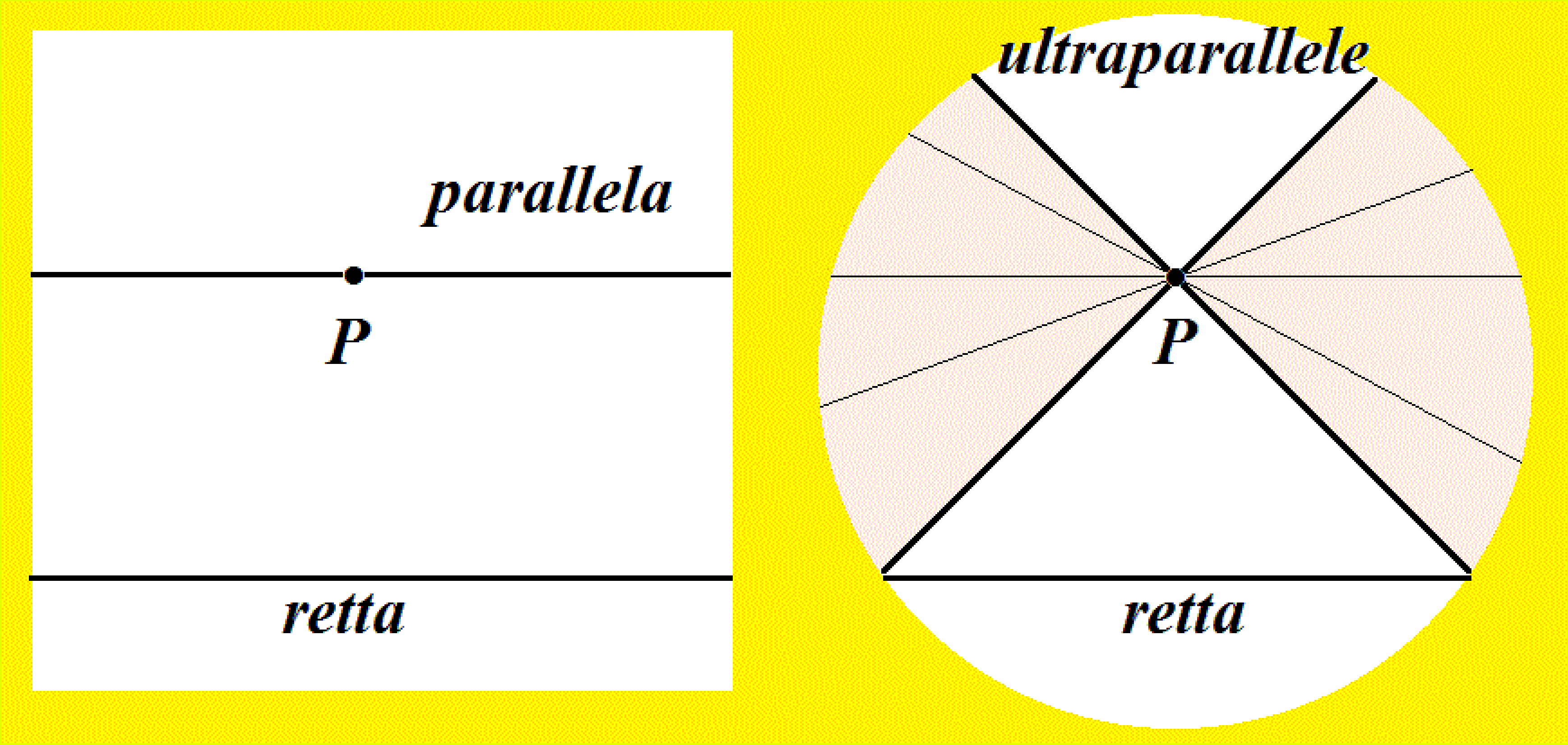
Uso quotidiano delle geometrie possibili



Analogie e differenze delle geometri possibili

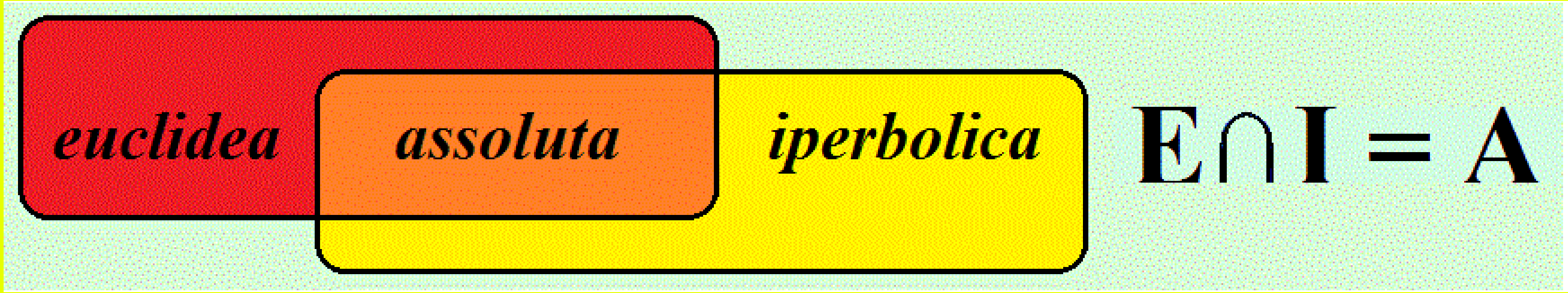
La "***libera***" scelta degli assiomi nel ***Gioco matematico*** genera teorie con risultati sorprendenti.

L'usuale geometria euclidea differisce da quella iperbolica per un unico assioma: l'unicità della retta parallela nell'euclidea, due ultraparallele in quella iperbolica.



Tutto ciò che si può dimostrare indipendentemente da questo assioma sono teoremi sia euclidei che iperbolici.

La **geometria** **assoluta** è costituita dai teoremi dimostrabili utilizzando gli assiomi comuni alle due geometrie (incidenza, ordinamento, congruenza e continuità) .



Esempi di teoremi comuni (gometria assoluta):

Gli angoli alla base di un triangolo isoscele sono congruenti;

In un triangolo ogni angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti ad esso;

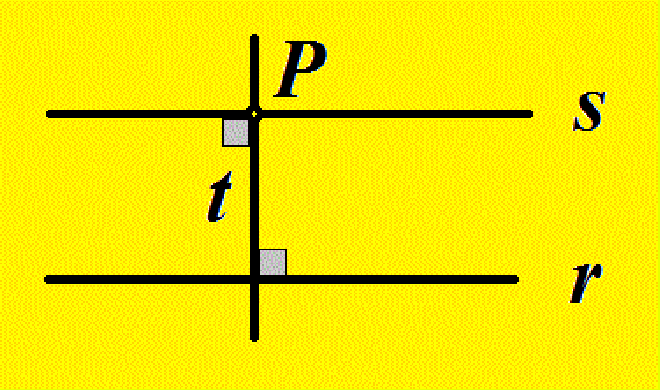
Un lato di un triangolo è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza;

Per un punto assegnato passa un'unica retta perpendicolare ad una retta data;

Due rette di un piano sono parallele se formano con una trasversale angoli alterni interni uguali.

Conseguenza degli ultimi due teoremi è il notevole risultato:

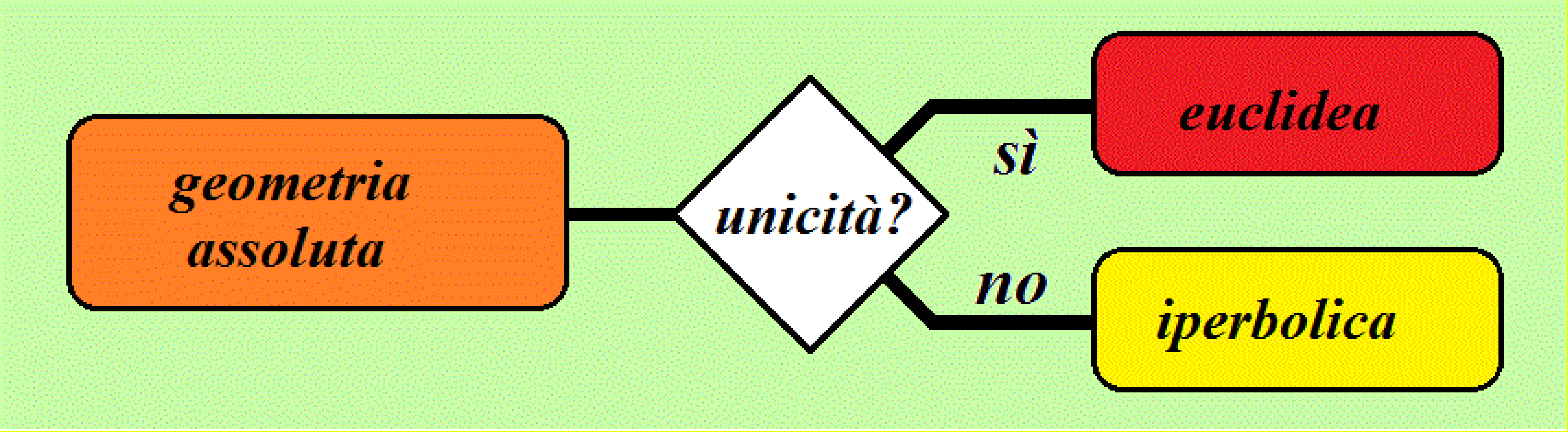
Da un punto esterno ad una retta si può condurre una parallela alla retta data.



Non possiamo però dimostrare che la parallela ***s*** sia unica per cui siamo ad un **bivio** **(libera scelta)**:

o postulare **l'unicità** ottenendo così la **geometria euclidea** oppure ammettere **l'esistenza di più parallele**.

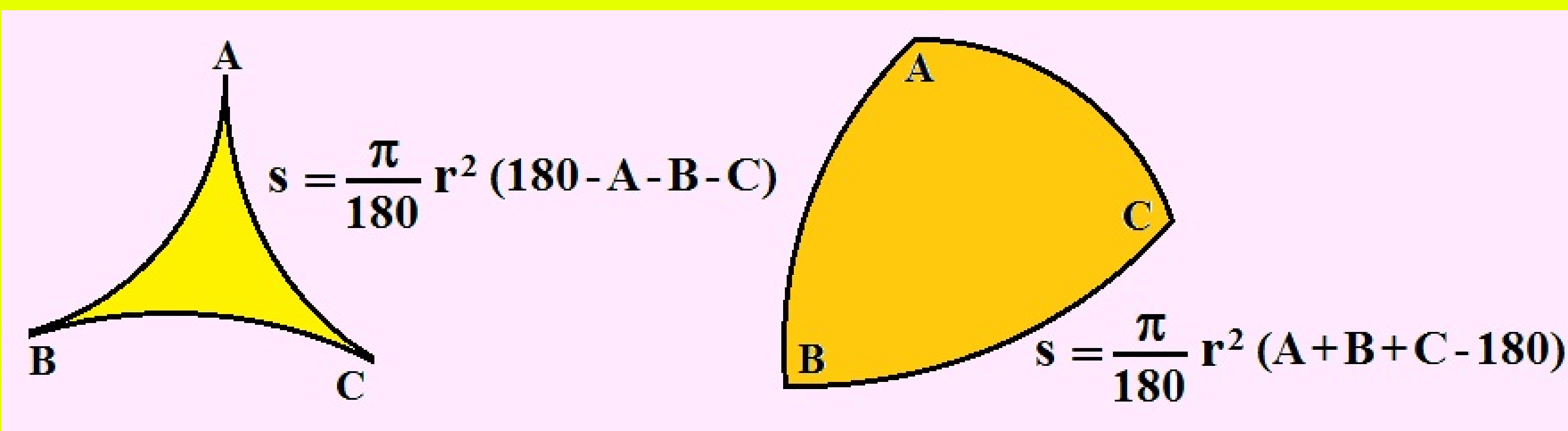
Scegliere la seconda ipotesi dà luogo a quella **iperbolica**.



Da questo punto in poi le due geometrie divergono e in quella iperbolica si ottengono risultati inusuali e sorprendenti:

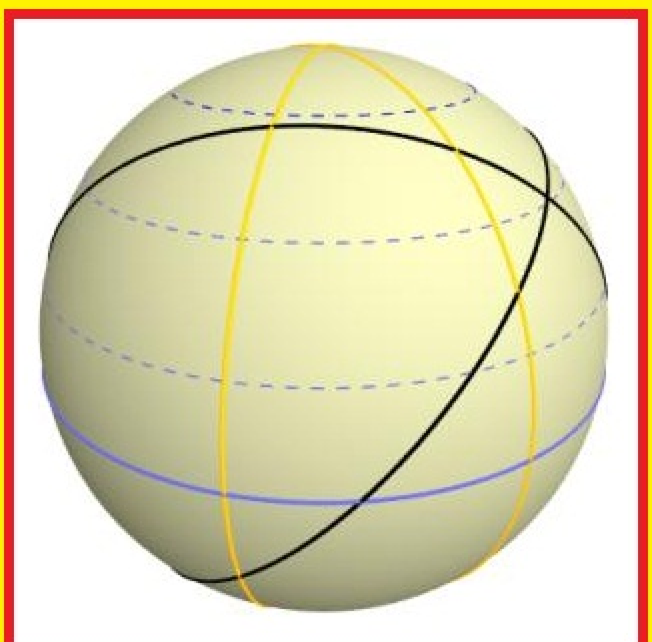
la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di π, diminuisce se l'area del triangolo aumenta mentre tende a π se l'area tende a 0; l'area di un triangolo è una funzione della somma degli angoli cioè si può calcolare noti gli angoli (come nella geometria ellittica); triangoli simili sono anche congruenti cioè triangoli aventi gli angoli uguali avranno anche i lati uguali.

area proporzionale al difetto o all'eccesso

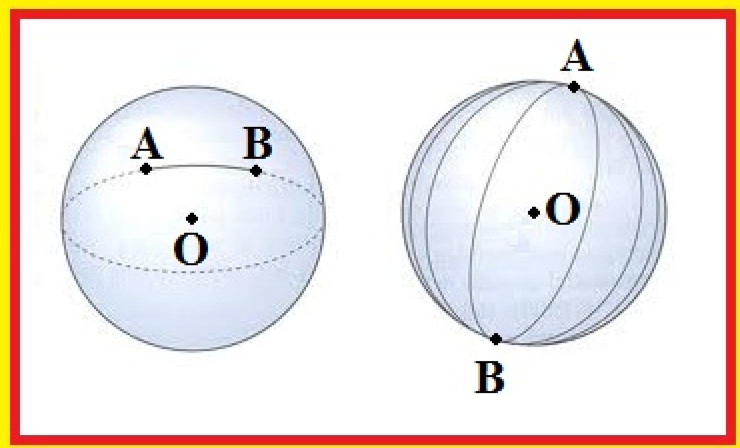


La geometria ellittica ha un numero inferiore di assiomi.

Un suo modello è costituito dalla sfera in cui si prendono come geodetiche le circonferenze di raggio massimo.
Due qualsiasi circonferenze di raggio massimo si intersecano in due punti antipodali per cui non esistono parallele e non vale il primo assioma di incidenza (…).
Due punti antipodali individuano infinite rette.



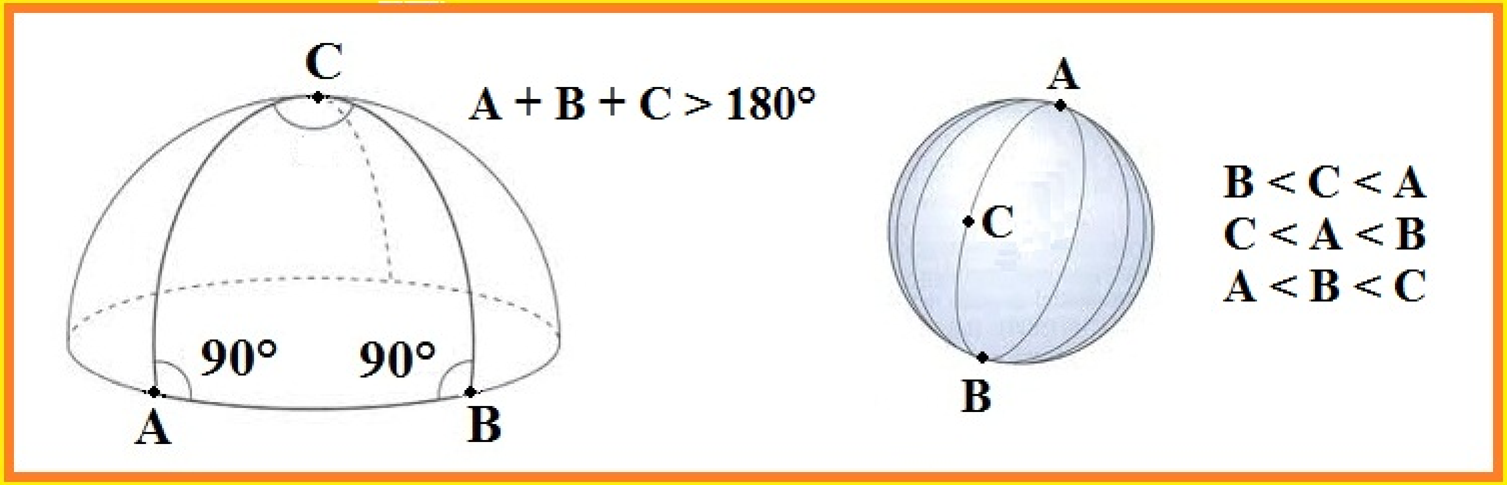
geodetica **AB**



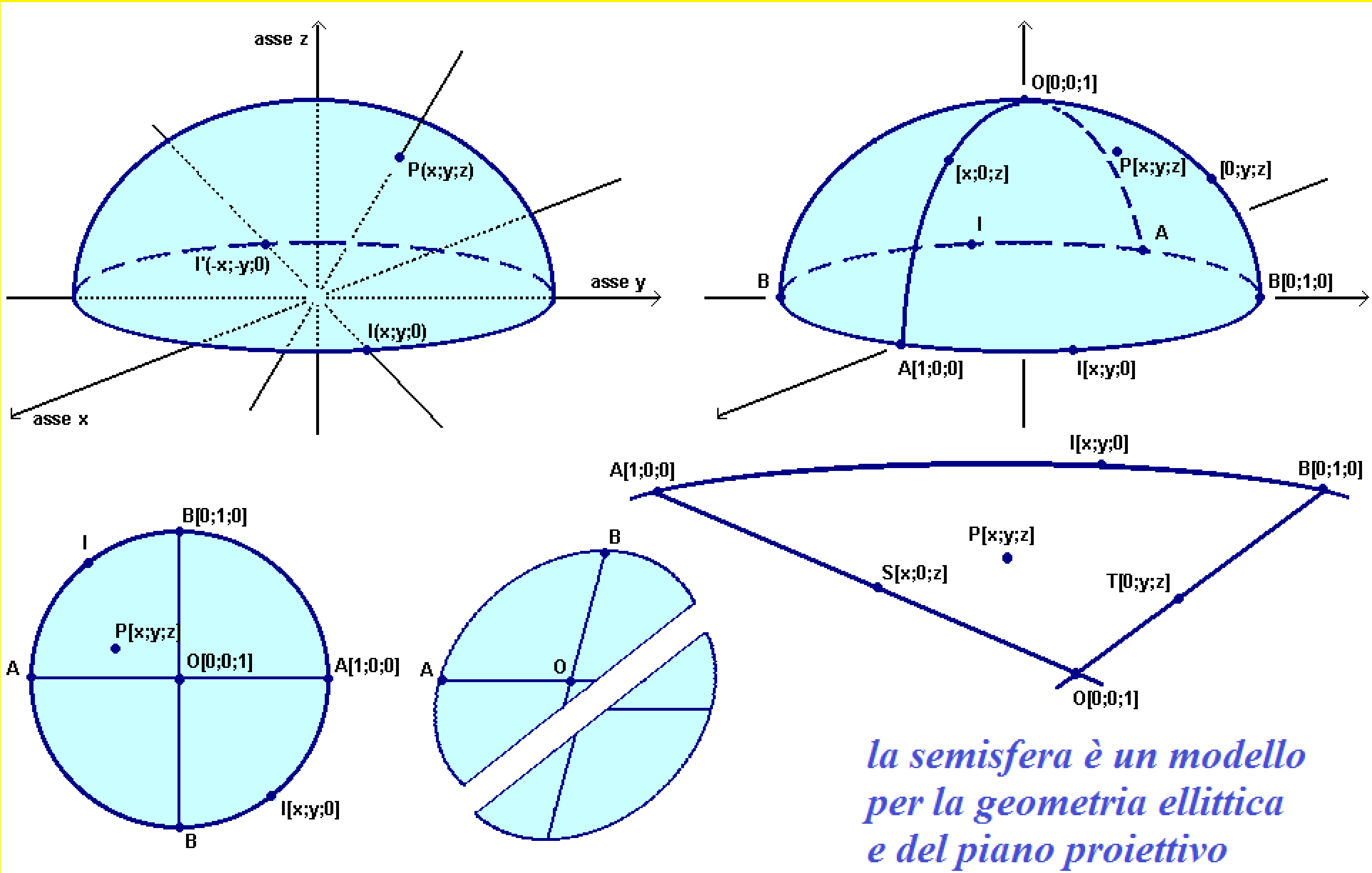
fascio di rette passanti nei punti antipodali **A** *e* **B**

Si può eliminare l'inconvenienza causata dai punti antipodali passando ad un modello in cui tali punti si "incollano”, limitandosi così ad una "semisfera";
ma anche in questo caso le "rette" rimangono curve chiuse per cui non vale il primo assioma di ordinamento (…).

Per tre punti su una curva chiusa non è possibile stabilire quale punto stia tra gli altri due.



Geometria ellittica e piano proiettivo!



proiezione del piano usuale in quello proiettivo

Questo modello tridimensionale evidenzia la ***corrispondenza biunivoca*** tra i punti di un ***piano usuale*** e i punti propri del ***piano proiettivo***.

Il piano usuale (***lastra di vetro sintetico***) è posto ad altezza $h > r$ mentre la ***zuppiera colorata*** (semisfera di raggio r e centro O) rappresenta il piano proiettivo.

Tramite le ***stecche*** ad ogni punto del piano usuale corrisponde un punto proprio del piano proiettivo. In tal modo le usuali rette parallele del piano si trasformano in "rette" parallele proiettive aventi lo stesso punto improprio o punto all'infinito (situato sulla circonferenza bordo della zuppiera);
la parabola usuale del piano si trasforma nella "parabola" proiettiva in cui i rami convergono nello stesso punto improprio.

Magia del piano proiettivo:
le rette parallele convergono nello stesso punto all'infinito mentre la parabola si chiude in una ellisse.

A proposito di libera scelta!

Abbiamo visto che la geometria assoluta è la parte comune tra la geometria euclidea e quella iperbolica. La separazione tra le due geometrie avviene postulando l'unicità o l'esistenza di più parallele. Questo significa che l'unicità della parallela è una affermazione non dimostrabile (indipendente) a partire dagli assiomi della geometria assoluta.

La consapevolezza dell'indipendenza dell'assioma delle parallele e quindi la possibilità di avere più geometrie possibili, è una conquista recente della matematica avvenuta nel XIX secolo (C.F.Gauss, N.Lobachevskij, J.Bolyai: conquista inizialmente ostacolata, a causa del suo stridente contrasto con la filosofia imperante di Kant che assumeva come giudizio sintetico a priori la geometria euclidea). Da Euclide (323 – 285 a.C.) in poi, per oltre duemila anni, ci sono stati diversi tentati di sostituire l'assioma delle parallele con assiomi ritenuti più evidenti oppure di dimostrarlo utilizzando gli altri.

Quindi la "libera scelta" di un assioma con la conseguente possibilità di costruire teorie con risultati diversi evidenzia il carattere astratto e formale della geometria e di tutta la matematica: i suoi oggetti sono ideali e modificando assiomi si amplia la categoria del possibile.

Incompletezza delle teorie formali di Gödel

In ogni teoria matematica T sufficientemente espressiva da contenere l'aritmetica, esiste una formula φ tale che, se T è coerente , allora né φ né la sua negazione sono in T.

In ogni sistema formale costruito a partire da un numero finito di assiomi prima o poi si raggiunge una zona d'ombra:
una *Prop.* indecidibile.
A quel punto si sceglie (si aggiunge un nuovo assioma) se la *Prop.* è vera o falsa e ...

si ricomincia a giocare!

La modalità con cui le geometrie possibili sono trattate in questa presentazione provengono da lezioni improvvisate, successivamente riscritte e riutilizzate per mini-dispense, scambi culturali e percorsi presentati all'esame di stato.

Qui di seguito riporto alcuni di questi lavori realizzati durante la mia permanenza al corso C del liceo scientifico "M. Curie" di Giulianova.

Per informazioni e suggerimenti:
sergio.bastianelli@istruzione.it

a.s. 2010/11_Scambio culturale
St Maartenschool Voorburg, Holland

Escher e la matematica

"Lo stupore è il sale della vita" M. C. Escher

L'artista (matematico) ubriaco e la bottiglia

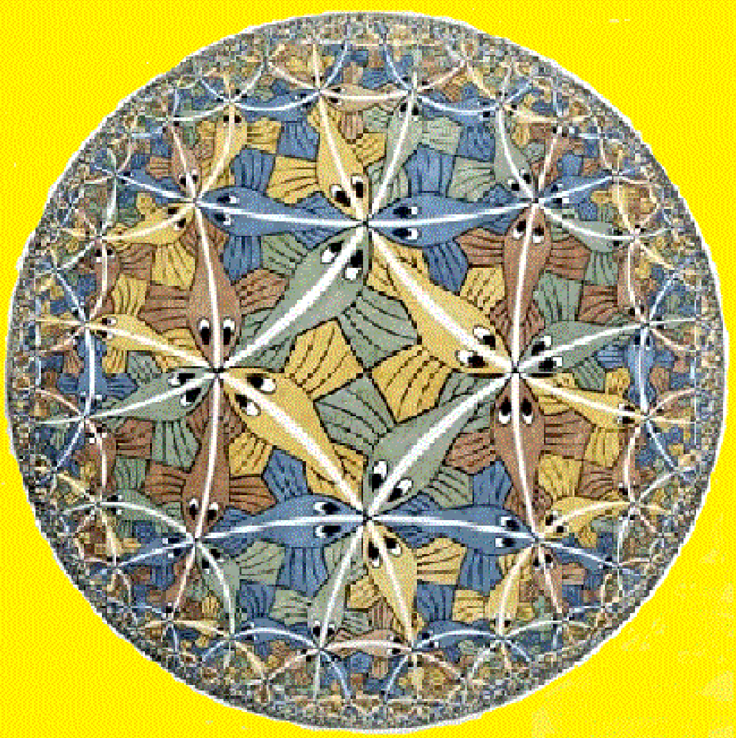
Limite del cerchio III

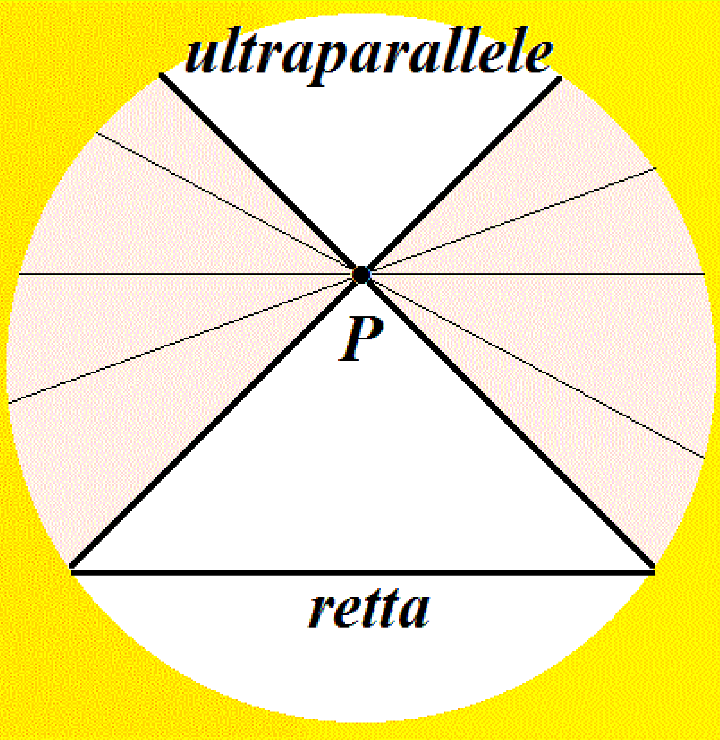
Xilografia basata sul modello di Poincaré

Occhio Euclideo: pesci simili (si riducono avvicinandosi al limite estremo del cerchio).

Occhio Iperboloco: pesci congruenti.

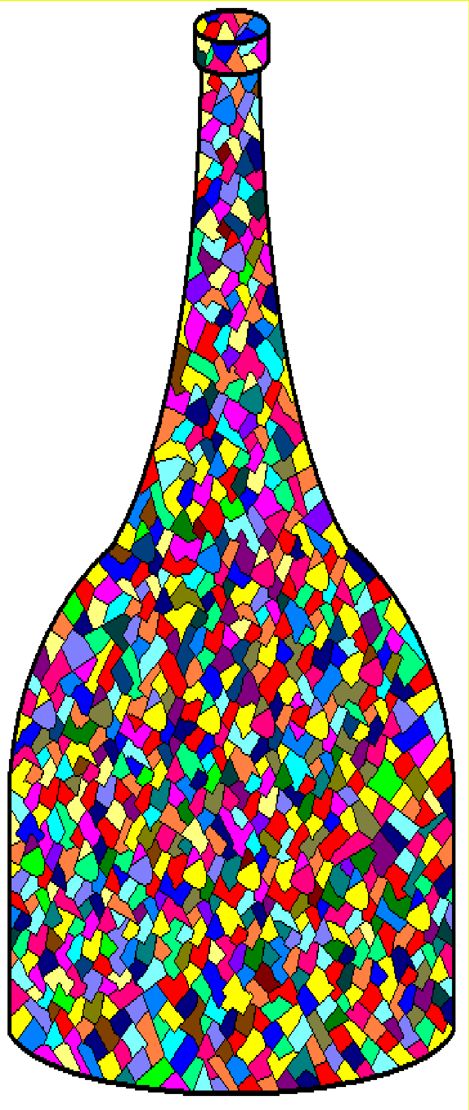
Il modello di Poincaré (… Klein) è importante poiché le rette iperboliche sono archi euclidei (… corde euclidee) …
I modelli collegano il problema della coerenza logica della geometria iperbolica a quello della geometria euclidea:
cioè, ammettere la coerenza di quella euclidea equivale ad ammettere la coerenza di quella iperbolica, perché se ci fosse una contraddizione nella teoria iperbolica, essa risulterebbe anche in quella euclidea.





a.s. 2007/08_percorso esame: Paola Corneli V C

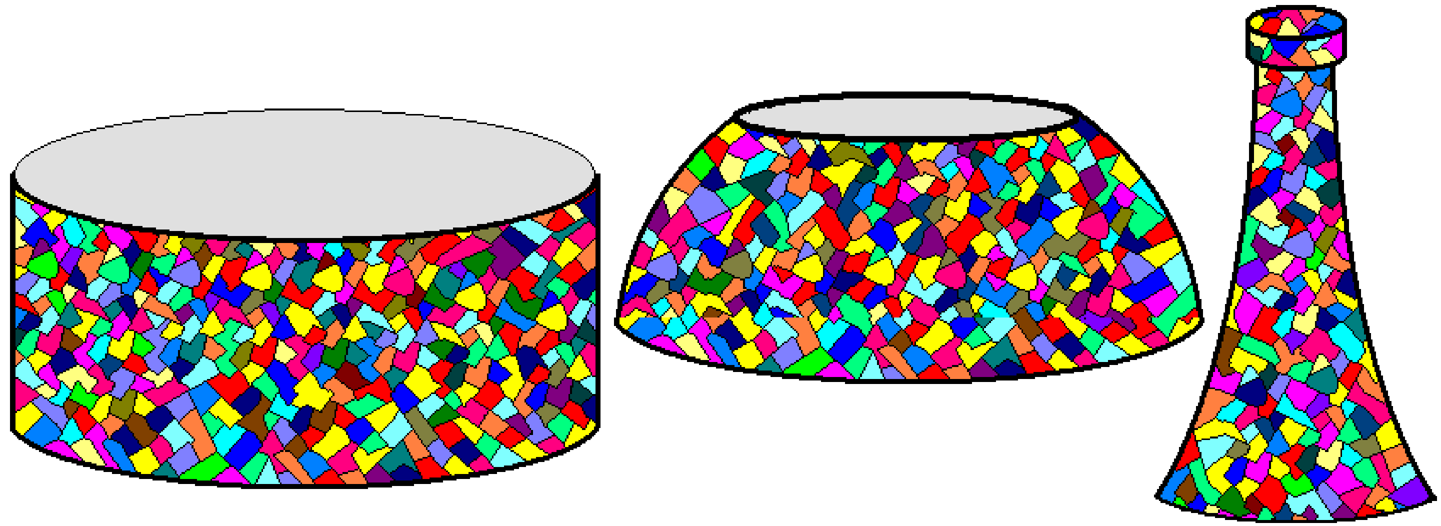
La bottiglia di Gaudí



Casa Batlló

es una pieza clave en la arquitectura de la Barcelona modernista. Fue construida por Antoni Gaudí en …

Festival delle possibili geometrie



… generalizzando il “piano” come l’insieme dei punti di una qualsiasi superficie si ottengono almeno tre tipi di geometrie:

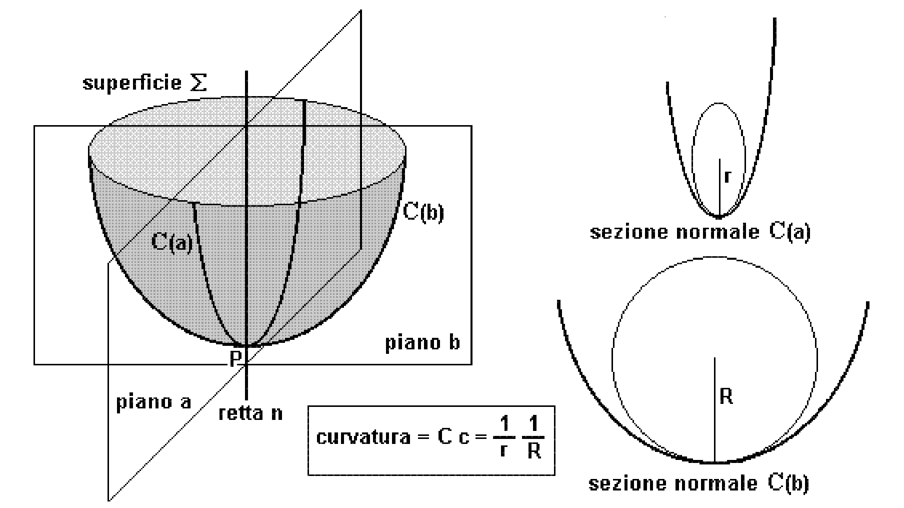
- euclidea:
usuale geometria del piano e in generale quella sulle superfici a curvatura nulla tipo il cilindro (da un rettangolo identificando due lati opposti si ottiene un cilindro … mentre una semisfera non può essere con continuità trasformata in una porzione di piano …); in ogni triangolo la somma degli angoli interni è un angolo piatto; unicità della parallela condotta da un punto esterno;

- ellittica:
è la geometria sulla superficie sferica e in generale quella sulle superfici a curvatura positiva; in ogni triangolo la somma degli angoli interni è maggiore di un angolo piatto; non esiste la parallela condotta da un punto esterno;

- iperbolica:
è la geometria sulle superfici a curvatura negativa; la somma degli angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto; esistono infinite parallele.

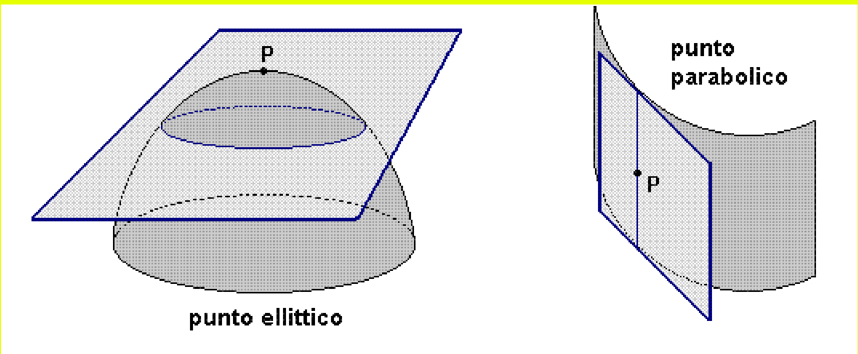
… Per meglio comprendere la classificazione sopra riportata occorre definire la curvatura nel modo più semplice possibile.
Si ha immediatamente l'intuizione che la curvatura di una curva in ognuno dei suoi punti può essere più o meno accentuata; la curvatura si definisce mediante la circonferenza che meglio approssima la curva e così è facile comprendere che a una curvatura forte corrisponde un raggio "piccolo" e a una curvatura debole un raggio "grande". Quando il raggio diventa infinitamente grande la curvatura tende ad annullarsi e la linea diventare una retta. Per una circonferenza la curvatura "C" è il reciproco del raggio "r" ossia $C=1/r$. La curvatura di una circonferenza è il reciproco del suo raggio perché la "differenza" con la retta tangente è inversamente proporzionale al raggio: quanto più la circonferenza si discosta dalla tangente tanto più piccolo è il raggio mentre quanto più la circonferenza si avvicina all'andamento rettilineo della tangente tanto più grande è il raggio. Considerata una generica curva piana la curvatura in un suo punto P si calcola determinando quella della circonferenza oscuratrice (tra le circonferenze che hanno la stessa retta tangente in P è quella che realizza il maggior numero di intersezioni coincidenti in P).

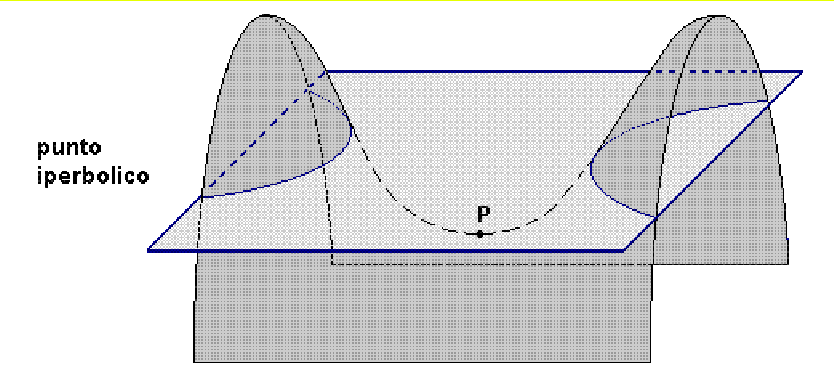
Più complesso è calcolare il "numero" curvatura di una superficie sigma in un suo punto P: intuitivamente e per analogia con quanto visto prima esso esprimerà di quanto la superficie si discosta dal suo piano tangente in P.



Presa la retta n passante per P ed ortogonale al piano tangente, ogni piano passante per n intersecato con la sigma individua una curva piana detta sezione normale; per ogni sezione normale calcoliamo la rispettiva curvatura.
L'insieme numerico ottenuto avrà un valore massimo $C = 1/r$ ed uno minimo $c = 1/R$ (si dimostra che questi valori si hanno in corrispondenza di due sezioni normali giacenti su piani tra loro ortogonali): allora la curvatura di sigma in P è il numero positivo $Cc = (1/r)(1/R)$ quando le sezioni normali sono collocate nello stesso semispazio rispetto al piano tangente, è il numero negativo $-Cc = -(1/r)(1/R)$ se tali sezioni sono posti sui semispazi opposti.

Un punto avente curvatura positiva è chiamato "ellittico" perché la condizione espressa nella definizione equivale ad affermare che nelle vicinanze del punto, la superficie sigma è situata da una stessa parte del piano tangente; spostando leggermente tale piano esso interseca la superficie secondo una curva ellittica.
Se il punto ha curvatura negativa è chiamato "iperbolico" poiché il piano tangente taglia la superficie sigma separandola in due parti; un piano parallelo e vicino a quello tangente interseca sigma secondo una curva costituita da due rami separati simile all'iperbole.
Quando almeno una sezione normale è una retta si ottiene un punto "parabolico" di curvatura nulla; tale retta è proprio l'intersezione tra il piano tangente e la superficie.





Il piano o un cilindro sono esempi di superfici formati da punti aventi tutti curvatura nulla poiché almeno una sezione normale è una retta (curvatura nulla).
Preso un qualsiasi punto P della superficie sferica di raggio r, la retta n ortogonale al piano tangente in P passa per il centro della sfera; tutte le sezioni normali sono proprio circonferenze di raggio r passanti per P e sono collocate dalla stessa parte rispetto al piano tangente, per cui la curvatura è il numero positivo $(1/r)^2$.
Quindi quella della sfera è un esempio di superficie a curvatura costante positiva. ...

Le Geometrie non Euclidee

Breve saggio sulle geometrie *“astrali”* o da *“manicomio”*

… Queste geometrie mi affascinano perché esprimono il carattere “fantasioso” di questa scienza che ha la stessa natura ontologica di una poesia o di un romanzo: la parola, l’idea, ne precede l’oggetto.
Con la differenza che un prodotto artistico può essere “brutto”, mentre la matematica, essendo essenzialmente un modello interpretativo della realtà, rispecchia la bellezza intrinseca e l’armonia della natura. ...

… Nell'età matura dedicò il suo ingegno anche nel campo della filosofia, conseguendo risultati che lo pongono al livello dei più grandi pensatori che siano sinora apparsi nel mondo. Le sue opere di contenuto filosofico, che egli pubblicò dal 1902 in poi: *La Science et l' Hypothèse, La valeur de la Science, Science et Méthode e Dernières pensées*, portarono la sua fama anche fra il pubblico più lontano dalle scienze esatte.

Vogliamo ora mettere in evidenza il contenuto fondamentale del pensiero filosofico del Poincaré.

Negli ultimi decenni dell'Ottocento sorse, in quasi tutti i paesi dell'Europa, un vasto e profondo movimento di reazione al positivismo, il quale si ramificò in vari indirizzi di pensiero. Uno di questi indirizzi, detto convenzionalismo, si affermò nei primi anni del nostro secolo in Francia, per opera di scienziati-filosofi, soprattutto francesi, e si manifestò come un processo alla scienza. A capo di questo movimento di critica della scienza fu Henry Poincaré. Ecco, in breve, quali furono i motivi che diedero al Poincaré lo spunto per le riflessioni critiche sul valore della matematica, portandolo a conclusioni ch'egli poi estese anche alle altre scienze.

La geometria euclidea era tradizionalmente apparsa la sola geometria possibile, il tipo di scienza razionale, il modello della conoscenza universale e necessaria.

Nel corso del secolo XIX, però, s'erano venute formando, accanto alla geometria euclidea, altre geometrie, le quali, pur partendo da postulati diversi dal quinto postulato euclideo, giungevano a costruzioni sistematiche rigorosamente coerenti come quella di Euclide.

Sorgeva quindi il problema: dal momento che parecchie geometrie sono possibili,quale tra esse è vera? E che cosa fa conferire alla geometria euclidea quella superiore fecondità ch'essa ha dimostrato di possedere? Ecco il problema che si pose Henry Poincaré, il quale, per risolverlo, cercò di determinare la natura dei principì matematici. Se questi fossero, egli osservò, dei giudizi sintetici a priori, come riteneva Kant, essi s'imporrebbero a noi in tal maniera da non potere concepire la proposizione contraria del quinto postulato euclideo, e tanto meno poter costruire su questa un edificio coerente: non vi sarebbero, quindi, geometrie non-euclidee. Sono allora semplici verità sperimentali? Se così fosse, la geometria non sarebbe una scienza esatta, bensì una scienza soggetta a continue revisioni, suggerite appunto dall'esperienza. In verità però, si può dire che ciò non è vero dato che la geometria non si occupa dei solidi naturali, ma dei solidi ideali, assolutamente invariabili, che sono di quelli soltanto una immagine astrattamente semplificata.

"Gli assiomi non sono dei giudizi analitici a priori; essi sono delle convenzioni" .
"La geometria non è una scienza sperimentale; l'esperienza è per noi solo un'occasione di riflettere sulle idee geometriche che preesistono in noi. (…) La nostra scelta non ci è dunque imposta dall'esperienza. È semplicemente guidata dall'esperienza. Ma resta libera; noi sceglieremo questa geometria piuttosto che quella non perché è più vera, ma perché è più comoda. (…) Così le nostre esperienze sarebbero ugualmente compatibili con la geometria di Euclide e con la geometria di Lobacevskij che supponeva la curvatura dello spazio troppo piccola. Scegliamo la geometria di Euclide perché è la più semplice"

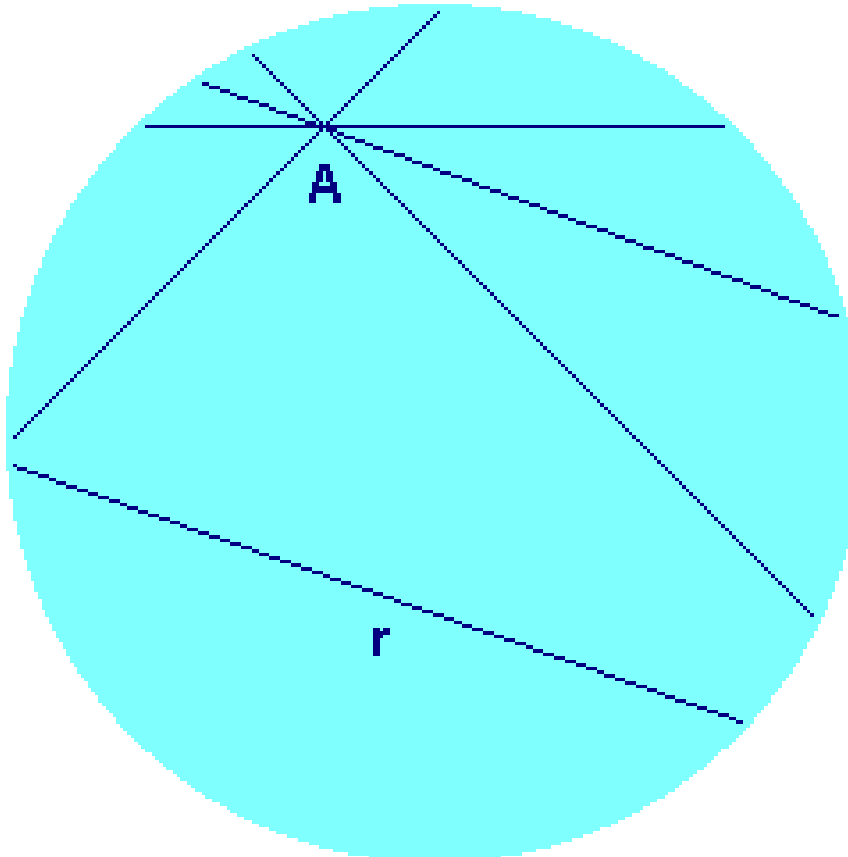
Poincaré

Dunque, secondo il Poincaré, i principi geometrici non sono né giudizi sintetici a priori, né verità sperimentali. Sono bensì convenzioni, forgiate dal nostro spirito nella piena libertà della sua attività creatrice, limitata soltanto dalla necessità di evitare contraddizioni. Pertanto, non ha senso domandarsi se sia vera la geometria euclidea o la non-euclidea. Sarebbe lo stesso che chiedere se il sistema metrico è vero e le antiche misure sono false. Una geometria non può essere più vera di un'altra, ma solo più comoda. Questo, in sintesi, il moderato convenzionalismo di Poincaré. Egli rappresenta un raro felice connubio tra scienza e filosofia, egli aveva a cuore la verità scientifica e non poteva separarla da quella morale: l'una e l'altra procurano, se scoperte, la stessa gioia. Leggendo le sue opere, non si sa se ammirare di più l'ispirazione filosofica o il sapere scientifico. ...

a.s. 2003/04_percorso esame: Emanuele Pompetti V C

Il Genio

... la massima lunghezza di ogni riga reale, di un filo, e persino di un raggio luminoso visibile al telescopio, è certamente finita, e poichè in ogni cerchio di raggio finito vi sono infinite rette passanti per un punto dato che non intersecano nell'interno del cerchio una data retta, l'assioma delle parallele non potrà mai essere verificato sperimentalmente ... [6]



la problematica del V postulato di Euclide

L'opera "ELEMENTI" di Euclide può essere considerata come il più famoso ed influente testo matematico della storia. Nei primi sei libri la geometria piana viene già presentata in forma assiomatica: si definiscono gli enti geometrici fondamentali (punto: un punto è ciò che non ha parti; linea: una linea è una lunghezza senza larghezza; retta: linea retta è quella che giace ugualmente rispetto ai suoi punti; ... e così via per un totale di ventitré definizioni), si assegnano cinque postulati (assiomi di natura geometrica) per stabilire i legami tra gli enti geometrici fondamentali e cinque nozioni comuni (assiomi di natura logica validi per ogni scienza) [5, 6, 7].
Anche se è presente una debolezza iniziale (... alcune definizioni non definiscono nulla; infatti non c'è nessun elenco preliminare di elementi indefiniti, rispetto ai quali si debbano definire gli altri elementi. ... [5]), l'esposizione chiara dei teoremi e il rigore logico con cui si susseguono hanno reso l'opera un testo perenne, utilizzata per oltre duemila anni ed ancora attuale.

POSTULATI

Risulta postulato che:

- **si possa tracciare una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto;**
- **si possa prolungare indefinitamente una linea retta (traduzione letterale: una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta);**
- **si possa descrivere un cerchio con un centro qualsiasi e un raggio qualsiasi;**
- **tutti gli angoli retti sono uguali;**
- **se una retta che interseca due altre rette forma dalla stessa parte angoli interni inferiori a due angoli retti (cioè tali che la loro somma è minore di un angolo piatto), le due rette, se estese indefinitamente, verranno ad incontrarsi da quella parte dove gli angoli sono minori di due retti.**

NOZIONI COMUNI

- **cose uguali ad una medesima cosa sono uguali anche tra loro;**
- **se cose uguali vengono aggiunte a cose uguali, le totalità sono uguali;**
- **se cose uguali vengono sottratte da cose uguali, i resti sono uguali;**
- **cose che coincidono l'una con l'altra sono uguali l'una all'altra;**
- **il tutto è maggiore della parte.**

L'evidenza richiesta ai postulati geometrici può essere legata o all'effettiva costruzione di un modello oppure alla corrispondenza con un modello già presente in natura. Ad esempio, è possibile, utilizzando riga e compasso, costruire modelli da cui dedurre l'evidenza dei postulati I, III e IV.

Nel II postulato Euclide aggira l'ostacolo dovuto al fatto che tutti i modelli empirici di retta che si possono osservare, quali fili tesi o raggi luminosi, hanno un carattere finito: afferma che ogni segmento possa essere prolungato quanto si vuole. Ciò è in accordo con i dati sperimentali perché il "quanto si vuole" dà ancora luogo ad un segmento. Ma nel V postulato si ricorre espressamente alla possibilità di prolungare "illimitatamente" la retta oltre il "quanto si vuole" determinato da qualsiasi modello [6, 7].

Dopo Euclide il V postulato è stato enunciato nella seguente forma equivalente:

<u>assioma delle parallele</u> **per un punto non appartenente ad una retta si può tracciare una ed una sola retta parallela alla retta data.**

Per duemila anni ci sono stati diversi tentati di sostituire l'assioma delle parallele con assiomi ritenuti più evidenti oppure di dimostrarlo utilizzando gli altri nove. …

... Colui che più si avvicinò fu senza dubbio Girolamo Saccheri (1667- 1733), ... pubblicò il libro "Euclides ab omni naevo vindicatus" in cui si sforzava con un procedimento molto elaborato di dimostrare il postulato delle parallele ... decise di applicare, a tale problema, il metodo della reductio ab absurdum (dimostrazione per assurdo). …

Nel secolo XVIII vi fu un notevole interesse per questo problema insoluto e matematici, professionisti e dilettanti tentarono di dimostrare che il V postulato era una conseguenza logica degli altri ... Gauss (1777-1855) uno dei più abili matematici di tutti i tempi ... inviò una lettera al matematico ungherese Farkas Bolyai in cui indicava l'errore contenuto nella dimostrazione di Bolyai dell'assioma delle parallele, cioè la sostituzione di un argomento infinito con uno finito. Egli aggiungeva nella stessa lettera che anche lui si era trovato nei guai per la stessa difficoltà. Nel 1815, però, recensendo alcuni libri, alludeva alla possibilità di una geometria per la quale l'assioma delle parallele non fosse valido, essendo tale geometria autoconsistente ed esente da contraddizioni. ...

Conoscendo l'usuale cautela di Gauss nel rivelare le proprie idee, questa affermazione ci fa pensare che egli avesse qualche prova per sostenerlo. Forse, visto che le sue idee si scontravano con quelle dei suoi contemporanei decise di non renderle pubbliche, avendo intuito, probabilmente a ragione, che non sarebbero state capite (imperava la filosofia kantiana).

Nel 1820 il figlio di Bolyai, Jànos (1802-1860), contagiato dalla fanatica preoccupazione del padre di dimostrare l'assioma del parallele, concluse che era impossibile dimostrarlo e cominciò a sviluppare una geometria che non si basava su tale assioma. Tre anni dopo pubblicò un articolo nel quale proponeva un sistema coerente di geometria non euclidea ... Gauss lesse tale articolo nel 1832 e scrisse al vecchio Bolyai che non lo poteva approvare perché il farlo equivaleva ad approvare il lavoro che lui stesso aveva fatto trenta anni prima. Il giovane Bolyai profondamente amareggiato della critica di Gauss morì praticamente senza alcun riconoscimento della sua soluzione ad un problema così importante, risolto indipendentemente, all'incirca nello stesso periodo e quasi nello stesso modo da Nikolai Ivanovich Lobachevskij (1792-1859). ... [12];

... Un metodo più ardito, suggerito da Gauss, venne portato avanti da Lobachevskij e da Bolyai.

<u>Se l'assioma delle parallele è logicamente deducibile dagli altri, negandolo e mantenendo fermo il resto, dovremmo riscontrare delle contraddizioni. Di conseguenza questi tre matematici attaccarono il problema indirettamente: negarono l'assioma delle parallele ma ottennero una geometria logicamente coerente. Essi dedussero che l'assioma fosse indipendente dagli altri ed indispensabile al sistema euclideo</u> . ...

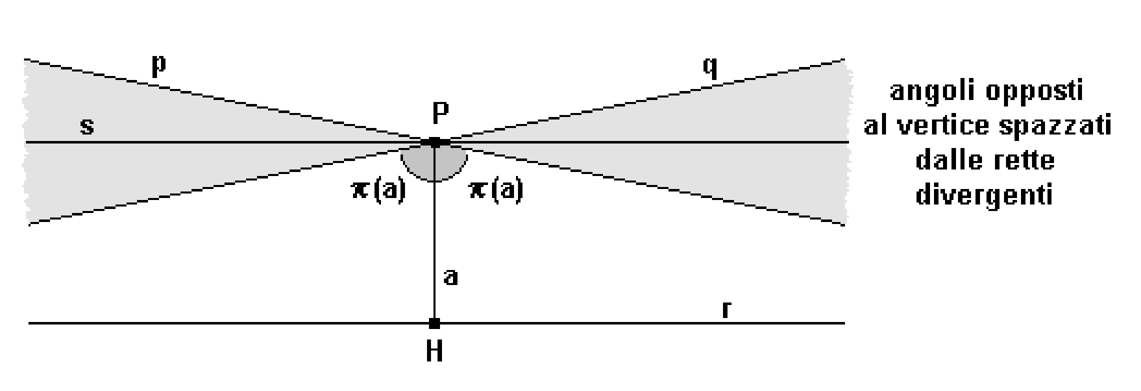
Non sembra che Gauss, colui che ha dato origine a tutto il sistema, per quanto riguarda strettamente la geometria non euclidea, abbia fornito più che dei risultati, in nessuno dei suoi scritti: le sue dimostrazioni ci rimangono ignote. Ciononostante è stato lui il primo ad investigare quali fossero le conseguenze della negazione dell'assioma delle parallele, ... il lavoro di Gauss sulla curvatura che è stato pubblicato ... venne intrapreso con lo scopo di una ricerca sui fondamenti della geometria . ... [3].

<u>Quindi l'aspetto innovativo che emerge ai primi dell'ottocento, è la consapevolezza di alcuni matematici dell'esistenza di una forma di geometria diversa da quella euclidea</u>.

Comunque dovrà trascorrere ancora molto tempo prima della definitiva affermazione di una idea così rivoluzionaria. I lavori di Lobachevskij e di Bolyai furono ignorati per quasi trent'anni finché non avvenne la pubblicazione postuma della corrispondenza e delle annotazioni di Gauss che risvegliarono l'interesse sull'argomento. ...

… Anche se non esiste un padre fondatore della geometria iperbolica [3, 4, 5], nel seguito ci riferiremo principalmente all'opera di Lobacevskij [1].

Dati una retta r ed un punto esterno P, le rette passanti per P si dividono in due classi rispetto alla retta r; la classe delle rette secanti che intersecano r e quella delle rette divergenti che non la intersecano. A quest'ultima classe appartengono due rette p e q, chiamate parallele, che costituiscono il passaggio dalle secanti alle divergenti.

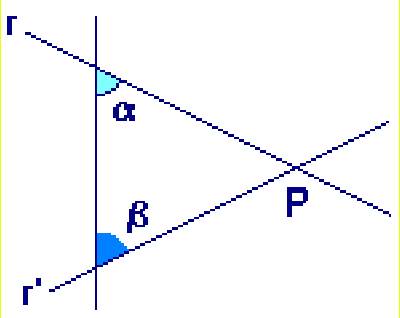


Tra le rette del piano passanti per P esistono sicuramente quelle che intersecano la retta r, ad esempio la retta perpendicolare ad r condotta da P, per cui la classe delle secanti è non vuota. Anche l'insieme delle divergenti è non vuoto per l'esistenza di s.
Le rette p e q costituiscono gli elementi di separazione delle due classi ed appartengono all'insieme delle divergenti; infatti, se un elemento di separazione fosse una secante, ad esempio p, essa taglierebbe la r in un punto A, allora preso un punto A' a destra di A la retta PA' risulterebbe ancora una secante. In altre parole:

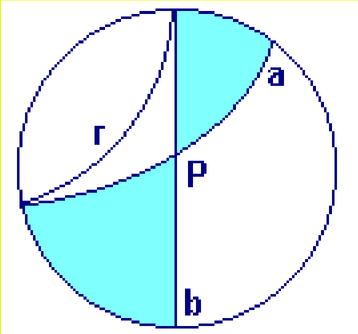
dato un punto P esterno ad una retta r esiste un angolo π (a) tale che tutte le rette per P che formano con il segmento perpendicolare PH un angolo minore di π (a) saranno secanti, mentre tutte le altre rette per P non intersecheranno r; le due rette che formano l'angolo π (a) con PH sono le parallele. …

a.s. 1998/99 MODELLI DELLA GEOMETRIA IPERBOLICA

<u>introduzione</u>

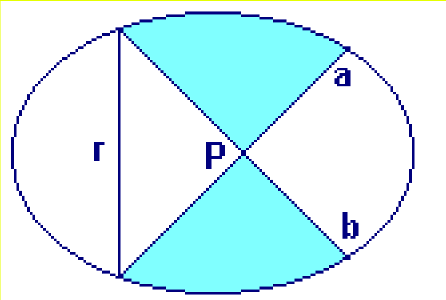


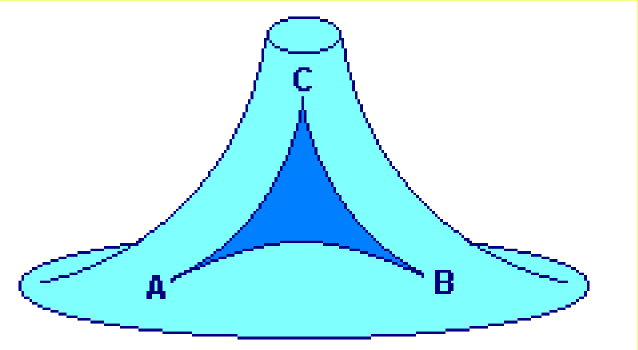
1 - la problematica del V postulato di Euclide
2 - la geometria iperbolica
3 - modello di Klein
4 - modello di Poincaré
5 - modello di Beltrami
6 - piano iperbolico
7 - come trasformare i vari modelli
8 - aspetti filosofici dell'esistenza delle geometrie non euclidee

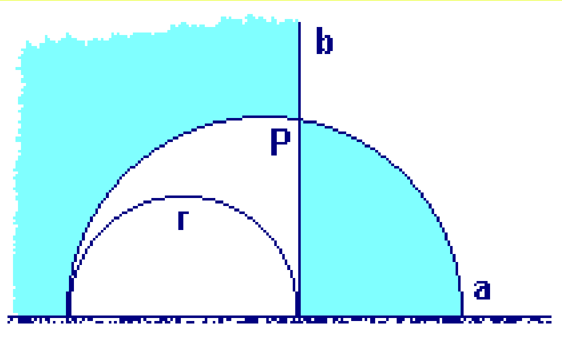


<u>prof. Sergio Bastianelli</u>

LICEO SCIENTIFICO STATALE "M. CURIE"







dal modello di Klein a quello di Poincaré

g geodetica (corda) nel cerchio m (Klein)
m geodetica (arco …) nel cerchio k (Poincaré)

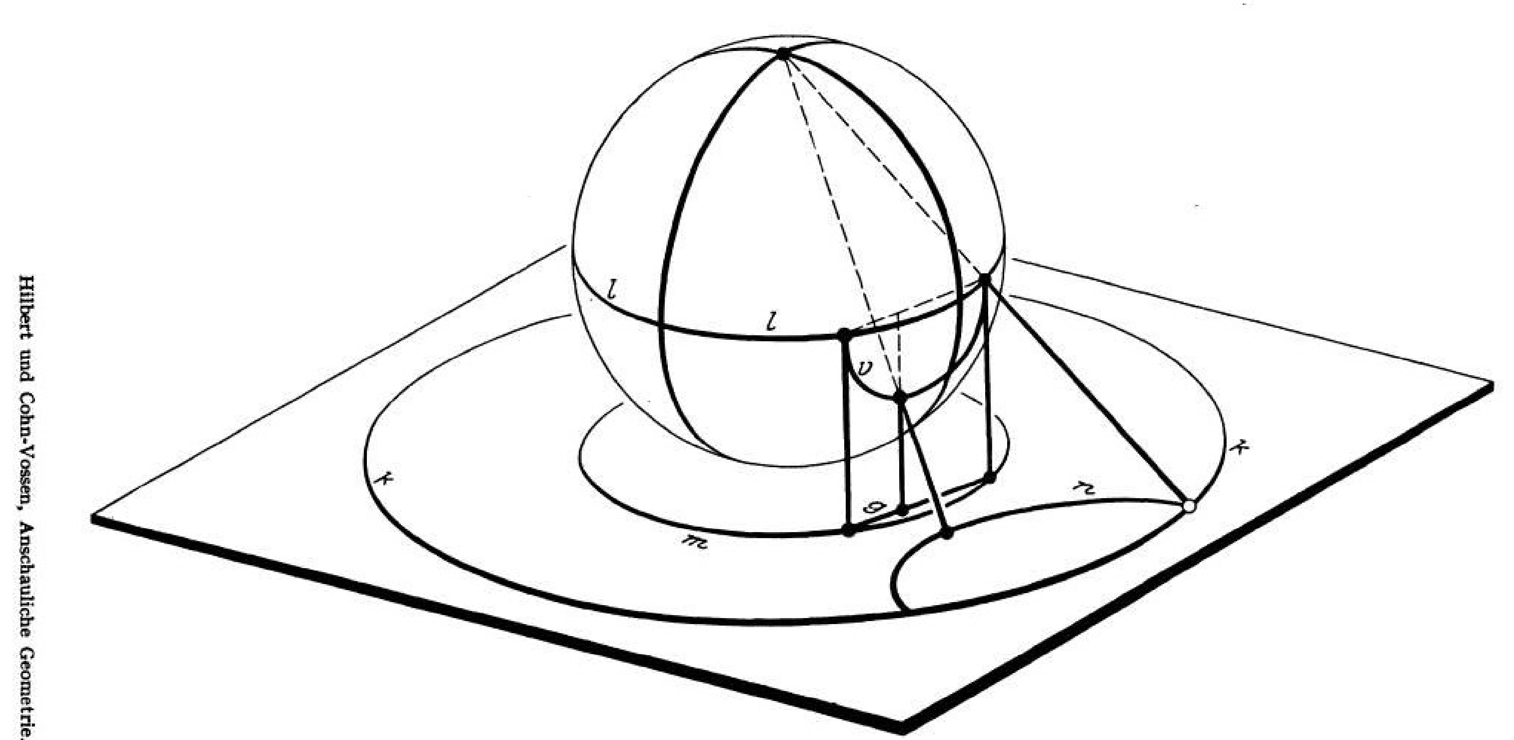
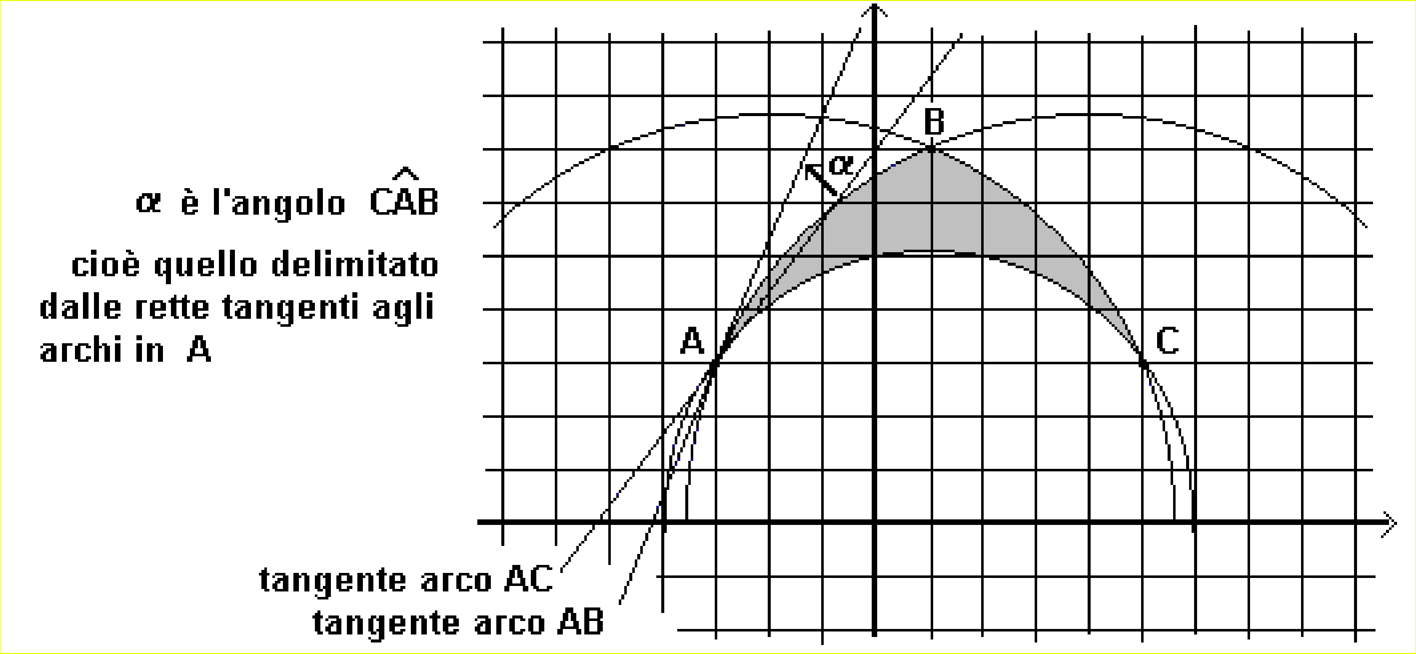


Abb. 246.

… Lo spunto per un lavoro sulla geometria iperbolica si è presentato in modo occasionale in una quarta classe del nostro liceo. Durante una lezione, dopo aver trattato la formula per calcolare la tangente dell'angolo formato da rette incidenti, basandomi su alcune reminescenze del piano iperbolico ho proposto agli alunni un esercizio particolare.

Dati i punti $A(-3;3)$, $B(1;7)$ e $C(5;3)$ in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, considerare il triangolo curvilineo ABC avente per "lati" archi di circonferenze con i centri sull'asse x; definito l'angolo tra due archi incidenti in un punto come l'angolo formato dalle rette tangenti agli archi in quel punto, calcolare la somma degli angoli interni del triangolo.



Dopo aver calcolato per ogni arco di circonferenza il rispettivo centro, i coefficienti angolari delle rette tangenti si determinano come gli antireciproci di quelli delle rette passanti per il centro e per l'estremo dell'arco. Abbiamo:

$$m_{AC} = \frac{4}{3}; \quad m_{AB} = \frac{7}{3}; \quad \tan(\alpha) = \frac{m_{AB} - m_{AC}}{1 + m_{AB} \cdot m_{AC}} = \frac{9}{37};$$

$$m_{BA} = \frac{3}{7}; \quad m_{BC} = -\frac{3}{7}; \quad \tan(\beta) = \frac{m_{BC} - m_{BA}}{1 + m_{BC} \cdot m_{BC}} = -\frac{21}{20};$$

Essendo il triangolo isoscele:

$$\alpha = \gamma = \arctan\left(\frac{9}{37}\right) \cong 13°40', \quad \beta = \arctan\left(-\frac{21}{20}\right) \cong 133°36', \quad \alpha + \beta + \gamma \cong 160°56'.$$

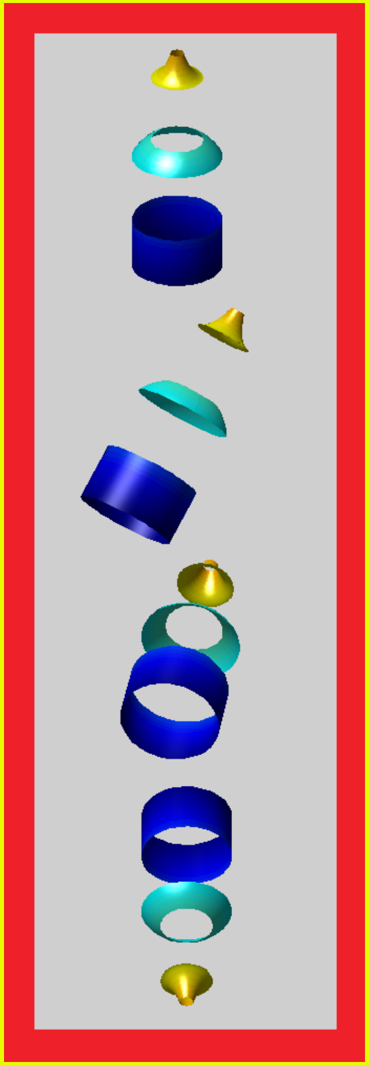
Dunque la somma degli angoli interni del triangolo curvilineo è minore di un angolo piatto e lo scarto non è imputabile alle approssimazioni effettuate.
[... ripetere l'esercizio con la terna $A(-7;6)$, $B(1;14)$ e $C(9;6)$ ...]

Esiste quindi una geometria con risultati diversi da quelli dell'usuale geometria euclidea.

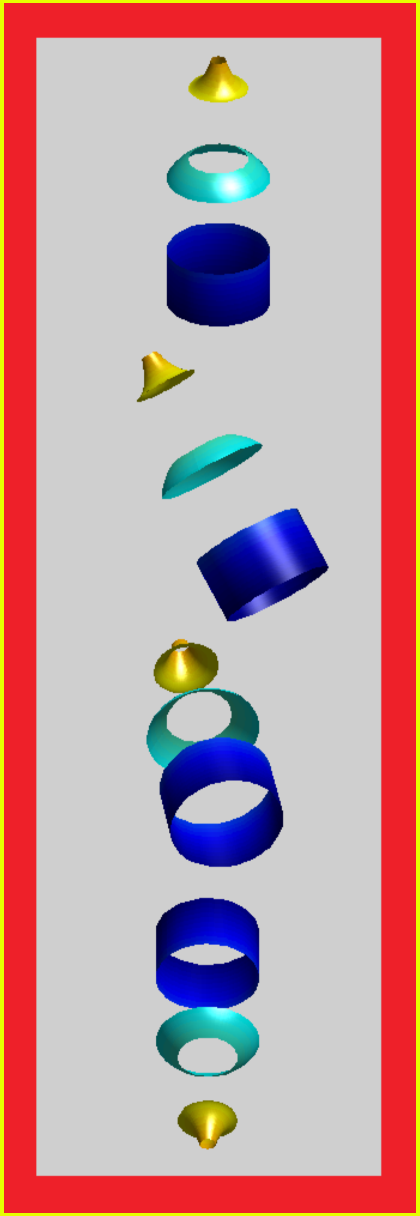
Obiezione di un alunno**:** <u>ma quel triangolo non è un triangolo</u>!

Il triangolo è insolito, o meglio ci sembra insolito, perché non abbiamo utilizzato i classici segmenti per formare i lati ma in diverse situazioni reali essi non esistono ed il loro ruolo è svolto da archi o da altre curve particolari.
Ad esempio, guardando una carta geografica su cui sono riportate le rotte aeree …

Infine il listato di un programma in MATLAB che visualizza la bottiglia mentre ruota e si decompone.



```
for k = 1:16
    a = 6; n = 2^a - 1; r = 2; t = sqrt(3);
                          quota = (k-1)*(16-k)/16;
theta = pi*(-n:2:n)/n + pi;
phi = ((5*pi/12)*(-n:2:n)'/n + pi/2)/2 + 11*pi/24;
X = sin(phi)*cos(theta);
Y = sin(phi)*sin(theta);
Z = (t + cos(phi) + log(tan(phi/2)))*ones(size(theta));
surf(X,Y,Z);
hold on
theta1 = pi*(-n:2:n)/n;
phi1 = (((pi/2)*(-n:2:n)'/n + pi/2))/6 + pi/6;
X1 = r*cos(phi1)*cos(theta1);
Y1 = r*cos(phi1)*sin(theta1);
Z1 = (r*sin(phi1))*ones(size(theta1));
surf(X1,Y1,Z1 – quota);
[X2,Y2,Z2] = cylinder(t,n);
surf(X2,Y2,2*(Z2 - quota) – 1);
```



```
q= max(t + cos(phi) + log(tan(phi/2)));
[X3,Y3,Z3] = cylinder(min(sin(phi)),n);
surf(X3,Y3,Z3 + q + quota)

grid off
axis off
axis equal tight
shading interp

    axis vis3d
    p = camlight('left');lighting phong
    for i = 1:36;
        alfa = real(j^k);
        camorbit(10*alfa,10*(alfa-1),'camera')
    camlight(p,'left')
    drawnow;
    end

hold off

    M(k) = getframe(gcf);

end
```

omaggio alle STURMTRUPPEN di BONVI

LA VECCHIA SCUOLA

LA NUOVA SCUOLA

Morale della bottiglia (3°) … libertà ...

Art. 33 L'arte e la scienza sono libere e libero ne è l'insegnamento. ...

Alessandro D'Avenia:
Scuola per i Greci, scholè: tempo libero. Per i Romani, ludus: gioco. Per noi: dell'obbligo. Qualcosa, almeno nelle parole, è andato storto. ...

Eugène Ionesco:
Se non si comprende l’utilità dell’inutile, l’inutilità dell’utile, non si comprende l'arte; e un paese dove non si comprende l'arte è un paese di schiavi o di robots, un paese di persone infelici, di persone che non ridono né sorridono, un paese senza spirito, dove non c’è umorismo, non c’è il riso, c'è la collera e l'odio. ...

… La scuola, oggi, sta vivendo un tempo particolare e interessante.

I 212 commi dell'unico articolo della triste legge n. 1101011 sono dettati da una visione riduttiva della scuola:
formare il cittadino competente (homo peritus) funzionale all'economia.

Certo, é importante il saper fare ma il rischio educativo è la crescita umana dell'alunno, maturazione di una personalità consapevole dei suoi bisogni profondi, libera, unita e perciò capace di vivere, creare e contribuire allo sviluppo del proprio paese.

L’educazione è un avvenimento che muove la libertà di altre persone solo in forza di un’energia originata dallo stupore, dalla stima, dalla devozione degli educatori per qualcosa che è loro accaduto e che li ha provocati.
Due aspetti colpiscono e rimangono impressi nel cuore e nella mente dei ragazzi: la figura dell'adulto responsabile e libero; la figura dell'adulto che nonostante l'“amaro e noia ...” è ancora capace di innamorarsi, di stupirsi e di coinvolgersi nel reale.