



Mariella Crotti- Franca Rossetti

L'Aquila Ottobre 2015



**Il frate matematico
e
la matematica divertente**



Due parole prima di cominciare

- Luca Pacioli è una figura che nella civiltà del Rinascimento ebbe un ruolo di primo piano nel raccordare la cultura latina dei dotti e quella volgare dei tecnici.
- Lo presenteremo sottolineandone le sue spiccate attitudini alla didattica; una didattica per un apprendimento rivolto a tutti gli studenti, più o meno dotati e basata su un approccio divertente e curioso.
- Secondo noi assai moderno!!!!

Enigma e descrizione del ritratto di Fra' Luca del Borgo



Attribuito inizialmente a Jacopo de' Barbari pare sia opera di Leonardo da Vinci .
Sul tavolo una moltitudine di oggetti sintetizza il pensiero di Pacioli a proposito della « sua » matematica.

Il dipinto (1)

- Il frate si trova dietro una scrivania con una lunga matita nella mano destra mentre disegna una figura geometrica su una tavoletta sul cui bordo è inciso il nome di Euclide.
- L'altra mano segue il testo che, secondo alcuni, è una copia della sua versione in volgare degli “Elementi” di Euclide mentre a lato, il libro rosso, si ritiene sia la “Summa”.
- Molto interessante sullo sfondo è il poliedro archimedeo rombicubottaedro con 26 facce, riempito per metà di acqua che simboleggia la limpidezza, senza principio e senza fine della matematica.

Il dipinto (2)

Sul tavolo sono poggiati gli strumenti tipici di un matematico dell'epoca: un goniometro, un gessetto, alcuni compassi, una penna e una scatoletta.

Sulla «Summa» è collocato un dodecaedro platonico e alle spalle del frate la figura di un personaggio rappresenterebbe l'allievo Galeazzo Sanseverino che aveva ospitato Pacioli nella sua casa milanese di Porta Vercellina.

Molti esperti ritengono che il quadro ben rappresenti l'idea del frate a proposito della matematica:

“strumento impiegato dal Creatore per plasmare l'universo e ordinarlo”

Ma, chi era Luca Pacioli?

- Nato a Borgo San Sepolcro intorno al 1445 in una famiglia poco agiata, si finanziò i propri studi lavorando come precettore, dedicandosi all'insegnamento e frequentando le più prestigiose corti italiane come ospite e amico illustre.
- Amico di Leonardo da Vinci, morì sul finire del 1517

Religioso e di cultura dotta

- Nel 1477 aveva già vestito il saio francescano e, da francescano studiò teologia e filosofia
- Apprese la matematica mercantile a Venezia dal pubblico maestro Domenico Bragadin, dopo i rudimenti appresi da Piero della Francesca
- Alla scuola di Rialto imparò il latino e le arti liberali
- Si collocò in mezzo tra abachisti ed algebristi
- Nel 1493 fu ripreso dai superiori dell'Ordine per essersi troppo distratto dai suoi doveri religiosi a causa dei suoi impegni didattici

Abachisti ed Algebristi

Pacioli è un uomo del suo tempo:

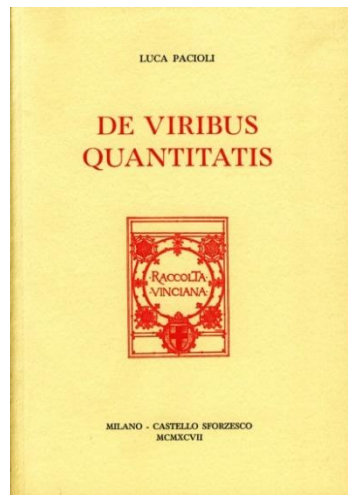
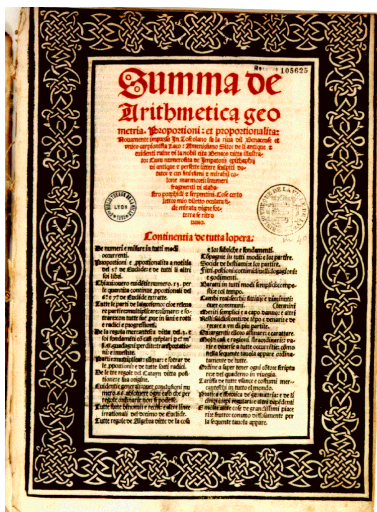
- Favorisce i maestri d'Abaco con i suoi scritti mercantili nei quali introduce la partita doppia.
- Introduce l'algebra sincopata o sintetica che usa simboli al posto di parole in contrapposizione all'algebra retorica

I suoi spostamenti

- Lo troviamo a Venezia come **precettore** presso un ricco mercante ..
- A Perugia, Napoli, Roma, Borgo san Sepolcro, Padova, Assisi, Urbino come **pubblico insegnante**
- A Milano , Pavia, Pisa, Bologna, Roma come **docente universitario**
- Fu, inoltre, **amico e ospite prestigioso** di Leon Battista Alberti a Firenze, di Ludovico il Moro a Milano, di Guidubaldo da Montefeltro a Urbino

Alcune sue opere

- Summa de arithmetica, geometria, proportione et proportionalità
- De divina proportione
- Oltre ai trattati sui giochi di cui si dirà



La « Summa de Arithmetica »

- Stampata nel novembre del 1494 è dedicata a Guidubaldo da Montefeltro
(dove il frate si trovava ospite)
- L'opera, in volgare , è un trattato generale di aritmetica e algebra, ma contiene anche elementi di matematica mercantile con riferimento alle monete, ai pesi, alle misure utilizzate negli Stati italiani di allora . Poche le novità rispetto al sapere matematico del tempo, ma quasi un'enciclopedia ...
- Vi compare l'algebra sincopata, in contrapposizione all'algebra retorica.

Il De divina proportione

- Il Divina Proportione è il trattato di Fra' Luca Pacioli sulle applicazioni della sezione aurea.
- Pacioli fece eseguire tre copie del trattato da amanuensi diversi; di queste copie se ne sono conservate due, una presso la Biblioteca Ambrosiana a Milano e la seconda presso la Bibliothèque Publique et Universitaire di Ginevra in Svizzera. La terza è andata perduta

In questo lavoro il frate riprende molte opere precedenti, tra cui la nota

De prospectiva pingendi di Piero della Francesca.

La proporzione divina, secondo Luca Pacioli, si applica a tutte le arti ed è necessario che tutti gli uomini di ingegno abbiano una copia dell'opera da cui avranno diletto e nuova conoscenza

Cosa dicono di lui gli storici

- Da alcuni è stato criticato per poca originalità o per plagio nei confronti di Piero della Francesca
- Solo di recente gli è stato riconosciuto il ruolo di abile divulgatore della matematica del suo tempo e una certa priorità nell'attribuzione di un valore didattico ai giochi matematici .
- Quest'ultimo punto, che lo rende assai moderno, contribuisce a restituire al frate di San Sepolcro lo spessore culturale e il ruolo che gli spetta, secondo recenti studi, nella civiltà del Rinascimento italiano.

La matematica spettacolo

- E' una sua invenzione, la matematica è fatta anche per stupire!!
- Il ruolo del matematico è quello di mago che indovina carte pescate da un mazzo, numeri pensati , possessori di oggetti senza aver assistito al riparto degli stessi ,
- Ciò per dar diletto alla brigata, specialmente per i meno dotati, anche se i dotti possono trarne vantaggio.

I trattati sui giochi

- 1478 **codice Vaticano Latino 3129**
(manoscritto autografo)
- 1478 De ludis in genere, cum illicitorum reprobatione, specialmente di quelli de scacchi in tutti modi (**Schifanoia**)-
manoscritto autografo
- 1496-1508 **De viribus quantitatis**

Il codice Vaticano Latino 3129

- Il manoscritto risale al 1478 ed è uno dei due autografi di Luca Pacioli (l'altro è lo Schifanoia).
- Venne redatto per insegnanti di scuole d'Abaco in quanto indicava il programma e il metodo da seguire nell'istruire gli allievi.
- Composto da 367 carte include, in una sezione, una vasta collezione di giochi matematici, buona parte dei quali riproposti, più tardi nel « De viribus».
- Le opere sui giochi sono molto interessanti fornendo al lettore ricchissime informazioni sulla didattica della matematica del tempo.

Vari tipi di giochi

I giochi del De viribus e quelli dello Schifanoia sono di vario tipo: si va dai giochi di *lettura del pensiero* (Indovina cosa ho pensato) a quelli di *chiaroveggenza* (In quale mano è nascosto l'anello?), dai *giochi con i dadi* (Quanti punti segna il dado nascosto?) a veri e propri *indovinelli*.

De viribus quantitatis(1)

De viribus quantitatis (le forze della quantità) è il trattato in cui i giochi sono posti e risolti, ma senza troppi commenti dal punto di vista matematico perché lo scopo è quello di divertire non di istruire.

Anche se alcuni giochi sono ispirati a quelli di Leonardo Pisano, il frate imbastisce attorno ad essi una storia oppure studia tutte le sue varianti ai fini di renderne gli effetti più eclatanti e interessanti per il pubblico.

In definitiva si propone come regista, affabulatore e uomo di spettacolo.

I suoi sono giochi di prestigio veri e propri.

De viribus quantitatis (2)

- Di questo trattato esiste un'unica copia manoscritta contenuta nel codice n. 250 della Biblioteca Universitaria di Bologna.
- Purtroppo non ci sono pervenuti né il nome del personaggio a cui l'opera fu dedicata, né l'anno della sua composizione, ma dalla lettera dedicatoria si desume che la sua compilazione avvenne tra il 1496 e il 1508.

De viribus quantitatis (3)

Il trattato è diviso in tre parti:

- delle forze numerali cioè de Arithmetica
- della virtù et forza lineale et geometria
- de documenti morali utilissimi

Il merito di Pacioli, riconosciuto solo dopo secoli, è quello di avere, per primo, raccolto giochi matematici e problemi dilettevoli vari in grande quantità; in un numero maggiore anche di quelli che si trovano nelle collezioni posteriori. Da essi si desume che l'autore conosceva la formula delle permutazioni circolari e i quadrati magici prima di Dürer.

Ma c'è di più

Nel De viribus Pacioli cita l'altro suo manoscritto, di natura completamente diversa, che descrive ben 114 schemi, con soluzioni, relativi al gioco degli scacchi:

si tratta del De ludo scachorum, detto SCHIFANOIA risalente al 1478. L'opera, menzionata in precedenza e scomparsa per più di 500 anni, è stata ritrovata nel 2006

Il suo ritrovamento

Nel dicembre 2006 un anonimo manoscritto di proprietà della Fondazione Palazzo Coronini Cronberg a Gorizia venne identificato come il De ludo scachorum, o Schifanoia di Luca Pacioli.

Gli studi accurati, durati oltre un anno e condotti da paleografi, glottologi e storici del gioco degli scacchi, hanno confermato l'autenticità dell'opera.

Il conte Guglielmo Coronini Cronberg ne parla in una lettera, per un'eventuale vendita, ad una ditta di New York già nel 1950. Pare provenisse dalla collezione di Palazzo Strozzi a Firenze.

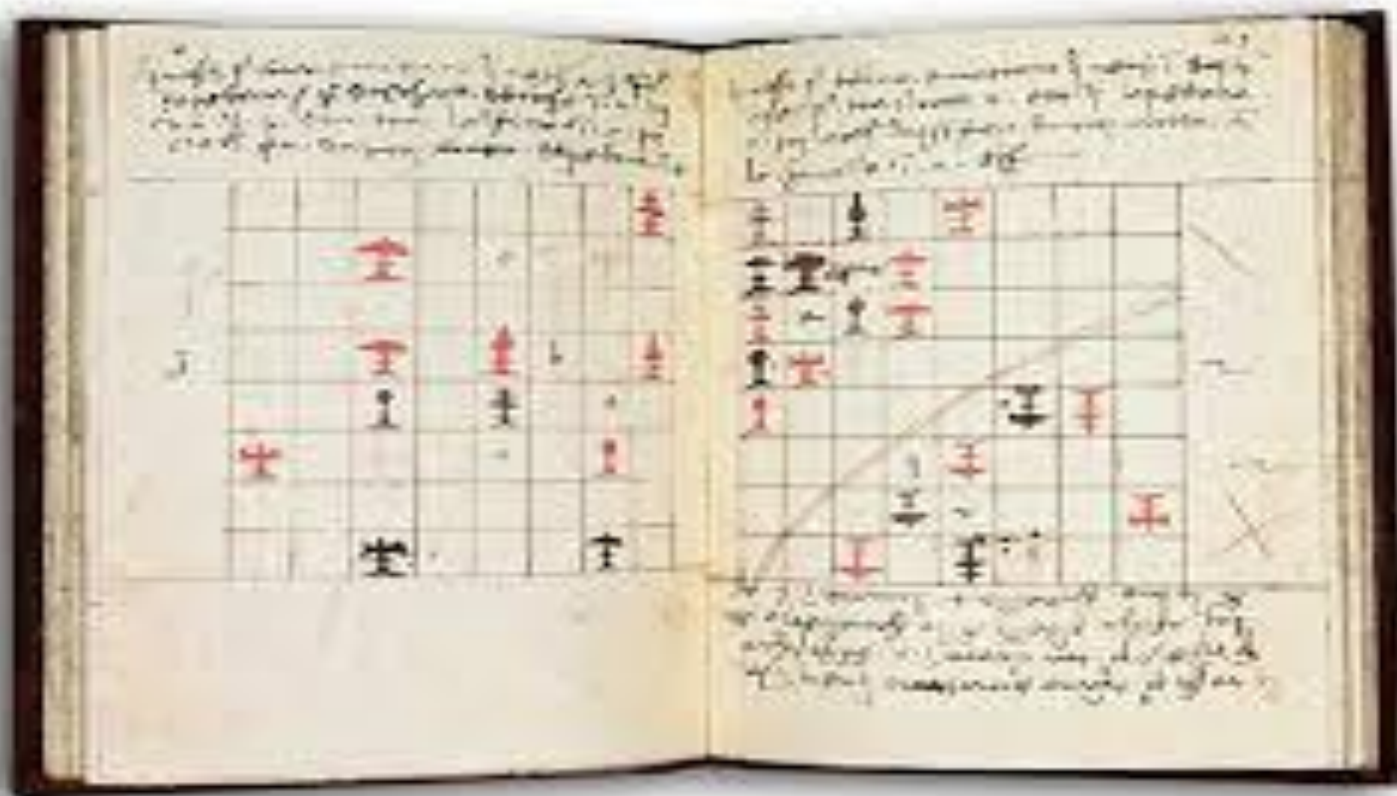
La mano di Leonardo

L'opera, menzionata anche in una richiesta di stampa da parte del frate al Senato veneziano nel 1508, si compone di 48 carte alcune decorate da Leonardo da Vinci.

E' dedicata ai duchi di Mantova, Francesco Gonzaga e Isabella D'Este, che avevano ospitato sia Pacioli , sia Leonardo da Vinci, quando furono costretti a lasciare la corte di Ludovico il Moro a Milano, presa dai francesi.

Isabella D'Este era donna di grande sensibilità culturale, ma anche abile scacchista.

De ludis in genere, cum illicitorum reprobatione,
specialmente di quello de scacchi in tutti i modi, detto
Schifanoia



Le figure dei pezzi degli scacchi

- Le figure rappresentate sono proporzionate in base al rapporto aureo.
- Si rifanno, per il Pedone a forme note, per la Regina ad una forma già utilizzata da Leonardo nel disegno di una fonte; per le figure di Alfieri, Cavallo, Torre e Re ai decori della Domus Aurea e ad altre dimore patrizie del 1400.
- Queste figure, che per la loro realizzazione introducono l'uso esclusivo del tornio, secondo uno studio approfondito e dettagliato sono riconducibili a prototipi inventati da Leonardo, ma disegnati a più mani

La « rottura » di Pacioli

Pacioli opera una distinzione netta tra “Ragioni” e “Bolzoni” dimostrando una vera passione nello stupire la platea.

- **“Ragioni”** - problemi matematici risolvibili mediante applicazione di una regola standard,
- **“Bolzoni”** ○ **“Tastoni”** – giochi matematici per la cui soluzione non sono applicabili algoritmi standard (esempi matematicamente interessanti di sregolatezza).



**Qualche esempio di gioco
per una didattica
interattiva e divertente**

Riparto di monete

Tre persone si sono divise una quantità nota di oggetti, ad esempio 10 ducati, in parti che il “mago” indovinerà facendo eseguire mentalmente ai giocatori certe operazioni aritmetiche.

Precisamente: il primo giocatore dovrà raddoppiare il numero degli oggetti presi; **il secondo** dovrà moltiplicare quanto in suo possesso per il numero degli oggetti iniziali; **il terzo** dovrà aggiungere 1 al numero degli oggetti iniziali e moltiplicare il risultato ottenuto per quanto in suo possesso.

Devono poi sommare i tre numeri così ottenuti e riferire il totale al mago. Dal risultato “il mago” indovinerà il numero degli oggetti posseduti dai tre giocatori.

Come?

Soluzione

Il mago toglierà la somma dichiarata dal prodotto ottenuto moltiplicando il numero degli oggetti iniziali per il numero degli oggetti iniziali +1.

Dividendo il risultato per il numero degli oggetti iniziali meno 1 ottiene che:

il quoziente indica il numero degli oggetti posseduti dal primo giocatore;

il resto indica quelli posseduti dal secondo

per gli oggetti posseduti dal terzo basta fare la differenza.

Nota

Il frate non si limita alla spiegazione matematica del gioco e alla relativa esemplificazione numerica, ma si preoccupa della sua realizzazione pratica che deve tenere conto degli effetti spettacolari e delle possibili difficoltà di calcolo dei giocatori derivanti dalla loro scarsa preparazione in aritmetica.

Algebricamente

a = oggetti da dividere

x = oggetti presi dal 1° giocatore

y = oggetti presi dal 2° giocatore

z = oggetti presi dal 3° giocatore

Es: $a=10$

$x=2$

$y=3$

$z=a-x-y = 5$



Es: a=10

$$2x$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$\rightarrow ay$$

$$10 \cdot 3 = 30$$

$$\rightarrow (a+1)z$$

$$11 \cdot 5 = 55$$

$$\rightarrow 2x+ay+(a+1)z$$

$$4+30+55 = 89$$

$$\rightarrow a(a+1)-[2x+ay+(a+1)z]=$$

per sostituzione $z=a-x-y$

$$=a(a+1)-[2x+ay+(a+1)(a-x-y)]=$$

$$=a(a+1)-2x-ay-a(a+1)+x(a+1)+y(a+1)=$$

$$=x(a+1-2)+y(a+1-a)=x(a-1)+y$$

$$110-89 = 21$$

$$\rightarrow [x(a-1)+y]:(a-1) = x \text{ e resto } y$$

$$21:9=2 \text{ e resto } 3$$

\rightarrow quoziente x (oggetti del 1° giocatore)

e resto y (oggetti del 2° giocatore)

$a-x-y=z$ (oggetti del 3° giocatore)

$$10-2-3=5$$

Con l'esecuzione delle operazioni indicate dal frate

Consigli del frate

Porre sul tavolo 10 monete e invitare i giocatori a dividersele senza che il “mago” veda.

Poi disporre sul tavolo 110 monete cioè $a(a+1)=10 \cdot 11$ e invitare i giocatori a prenderne, non visti, il primo il doppio di quelle che ha, il secondo 10 volte, il terzo 11 volte. Le monete che resteranno in tavola saranno 21 cioè il risultato finale delle operazioni prima viste.

A questo punto si prosegue come visto precedentemente.

Bolzone: il gioco dell'anello

- *“ Uno à dato un anello fra molte persone, e sa chi l'à e in che mano e in che detto e in che nodo, ma vol che tu lo trovi per ragione.*
- *Dimando commo farai per trovarlo”*

Il gioco dell'anello

Il gioco consiste nell'indovinare fra più persone chi ha un anello, in che mano e in quale dito e in quale falange del dito.

Si mettono le persone in ordine e si assegna loro un numero 1, 2, 3 ecc.. (qualunque). Si numerano le dita delle due mani assegnando 1 al mignolo della mano sinistra, 2 all'anulare ecc. 6 al mignolo della mano destra e .. 10 al pollice della mano destra. In questo modo con un numero si individuano contemporaneamente la mano e il dito. Poi si assegna 1 alla prima falange del dito (cominciando dal basso, 2 alla seconda e 3 alla terza)

Il gioco procede con l'invito del mago ad eseguire operazioni:
Chi ha l'anello moltiplichi il suo numero per 2, poi sommi 5, poi moltiplichi per 5, aggiunga il numero del dito in cui ha l'anello, sommi 10, moltiplichi per 10, sommi il numero della falange del dito in cui ha l'anello. Dichiarare il numero uscito.

Il mago indovinerà chi ha l'anello, in che mano, in che dito e in che falange del dito.

n = numero della persona che ha l'anello

m = numero del dito

r = numero della falange

$n \times 2 + 5$

$\times 5$

$+ m$

$+ 10$

$\times 10 + r$



Crotti- Rossetti SISM L'Aquila ottobre 2015

Sia **n** il numero di chi possiede l'anello, **m** il numero del dito e **r** il numero della falange.

$n \rightarrow (x2) = 2n \rightarrow (+5) = (2n+5) \rightarrow (x5) = 10n+25 \rightarrow (+m) = 10n+25+m \rightarrow (+10) = 10n+35+m \rightarrow (x10) = 100n+350+10m \rightarrow (+r) = 100n+10m+r+350$. Si toglie 350 rimane $100n+10m+r$ per cui n è il numero delle centinaia, m quello delle decine e r quello delle unità.

Esempio sia $n=10$ $m=6$, $r=3$

$10 \times 2 = 20$; $20 + 5 = 25$; $25 \times 5 = 125$; $125 + 6 = 131$; $131 + 10 = 141$;

$141 \times 10 = 1410$; $1410 + 3 = 1413$,

$1413 - 350 = 1063$ $n=10$ numero delle centinaia; $m=6$

numero delle decine; $r=3$ numero delle unità

Altro esempio $n=25$ $m=8$ $r=1$

$25 \times 2 = 50$; $50 + 5 = 55$; $55 \times 5 = 275$; $275 + 8 = 283$; $283 + 10 = 293$;

$293 \times 10 = 2930$; $2930 + 1 = 2931$, $2931 - 350 = 2581$ $n=25$; $m=8$; $r=1$

Bolzone: altro gioco per stupire

“ lo ò preso un numero in la mia mente, dimando che numero ò preso, e damme la regola ch'io possi trovare a ciaschuno che me domandasse”

Il “mago”

invita una persona del pubblico a pensare un numero , intero o frazionario, e a moltiplicarlo per dei numeri che egli stesso suggerisce, invita poi a dividere il prodotto così ottenuto per il numero pensato; il “mago” indovina il risultato finale.

Ad esempio la persona pensa il numero 6 ed è invitata a moltiplicarlo successivamente per 2, 3, 4 ,5. Otterrà 720; dividendo 720 per 6 otterrà 120 che il “mago” indovina. Ovviamente non si tratta di magia in quanto, indipendentemente dal numero pensato dal giocatore, il risultato finale sarà esattamente il prodotto dei numeri che il “mago” ha suggerito.

Bolzone: tre cose

“ Uno dispe[n]sa 3 varie cose fra tre persone e ciaschuno n' à una d'esse, dimando chi à l'una e chi l'altra avendo destribuito fra loro duchato, carlino e sestino ”

Tre giocatori si distribuiscono 3 oggetti (nell'ordine 1° una penna, 2° un fazzoletto, 3° una clessidra). Il mago matematico deve indovinare chi ha cosa e procede in questo modo:

Alla 1° persona A assegna il numero 12

Alla 2° persona B il numero 24

Alla 3° persona C il numero 36

Poi invita chi ha il primo oggetto a dividere il numero che gli è stato assegnato per 2; chi ha il secondo a togliere dal proprio numero $\frac{2}{3}$ dello stesso e, a chi possiede il terzo oggetto, a togliere dal proprio numero $\frac{3}{4}$ dello stesso.

Poi chiede che venga effettuata e dichiarata la somma dopo le operazioni consigliate.

Soluzione

Se esce 23 hanno nell'ordine le tre cose
ABC ($6+8+9=23$)

Se esce 24 hanno nell'ordine le tre cose
ACB ($6+12+6=24$)

Se esce 25 hanno nell'ordine le tre cose
BAC ($12+4+9=25$)

Se esce 27 hanno nell'ordine le tre cose
BCA ($12+12+3=27$)

Se esce 28 hanno nell'ordine le tre cose
CAB ($18+4+6=28$)

Se esce 29 hanno nell'ordine le tre cose
CBA ($18+8+3=29$)

Bolzone: facciamo 30, non 31!!

“ Doi giochano al trenta con li ponti de un dado e l'un dici al'alro- io voglio sempre far 30 innanze che te- e così fa, purché zaschuno pigli sempre el ponto de un dado, zoè da 6 in giù.

Dimando che ponto piglia ciaschuno”.

Questo gioco ha origini molto antiche e incerte(forse in Cina).

Si presenta in varie forme e può anche essere giocato al contrario rispetto alla versione del manoscritto.

Si fissa un numero

come somma finale (es: 30). Due giocatori partono da un certo numero e sommano al più 6 (i numeri del dado). Vince che arriva per primo al numero 30 senza oltrepassarlo.

Pacioli dice che chi gioca per primo deve seguire la seguente scala di numeri 2, 9, 16, 23.

Infatti se A gioca 2, B al massimo può arrivare a 8 e al minimo a 3. Quindi A, aggiungendo ad hoc un numero da 1 a 6, può arrivare sempre a 9. B al min. arriva a 10 e al max a 15, quindi A può arrivare a 16. B al minimo arriva a 17 e al massimo a 22. A può sempre arrivare a 23. B arriva al minimo a 24 e al massimo a 29 e quindi A arriva per primo a 30.

In generale

Sia **s** la somma da raggiungere e **r** il numero massimo che può essere aggiunto. Si divide **s** per **r+1**. Il resto è il primo numero della scala. Gli altri numeri si ottengono sommando al primo. **r+1**.

Es. s = 30 e r = 6 $30:7 = 4$ e resto 2

2 è il primo numero della scala.

Gli altri si ottengono sommando al primo 7

$2+7=9$; $9+7=16$; $16+7=23$

Oppure si parte da 30 e si toglie 7, si ottiene 23 e poi si toglie sempre 7 e così via. Se il resto della divisione fosse 0 (come accade se $s=35$ e $r=6$) allora bisogna far partire l'avversario e seguire la scala 7, 14, 21, 28, 35. Così si vince

Altro esempio:

S= 40 e r =6 $40:7 = 5$ e resto 5 Allora chi gioca per primo deve seguire la scala **5, 12, 19, 26, 33, 40**

N.B: anche se non si gioca per primi l'importante per vincere è che ad un certo punto si raggiunga un numero della scala.

Nota didattica:

esiti di apprendimento per il raggiungimento dei traguardi previsti, per lo sviluppo delle competenze, dalle Indicazioni nazionali del 2007

- interpretare e usare consapevolmente il significato delle operazioni
- usare il ragionamento aritmetico e la modellizzazione numerica per risolvere problemi tratti dal mondo reale o interni alla matematica
- operare tra numeri in modo consapevole sia mentalmente, sia per iscritto, sia con strumenti
- utilizzare lettere e formule per generalizzare o per astrarre
- produrre congetture, testare, validare le congetture prodotte
- impostare, discutere e comunicare strategie di risoluzione

*Tratto da : « I giochi matematici di
Fra' Luca Pacioli»*
Trucchi, enigmi e passatempi di fine
quattrocento

Dario Bressanini – Silvia Toniato
Edizioni Dedalo 2011

rossetti.franca@fastwebnet.it
cromace@libero.it



Crotti- Rossetti SISM L'Aquila ottobre 2015