

Primi studi sui giochi di dadi. Il problema delle parti e la corrispondenza tra Pascal e Fermat.

Luca Dell'Aglio

La storia della matematica in classe. Dalle materne alle superiori. Convegno nazionale. L'Aquila 15-17 ottobre 2015

Fase embrionale del calcolo delle probabilità

- formulazione di alcuni problemi caratteristici (giochi di dadi, problema della divisione della posta nel caso di partita interrotta)
- comparsa di alcune tecniche caratteristiche (calcolo combinatorio)

Cardano, *Liber de ludo aleae*



LIBER DE LUDO ALEÆ.

CAPVT PRIMVM.

De Ludorum generibus.

LVDI constant, aut agilitate corporis, velut Pila; aut robore, vt Discus, & Lucta, aut industriã, vt Latruncolorum, aut fortunã, vt Aleæ propriè, & Talorum; aut vtroque, vt Fritilli. Industria autem duplex, aut ludendi, aut certandi, velut in Primaria, nam & Chartarum ludus nomen subit Aleæ, quòd antiquo tempore Chartæ ignotæ essent: imò, & materia, qua conficiuntur. Indicio est, quòd scriberent in pergamenis coriis, scilicet hædonum, & papyro Ægyptia, & tabulis, & cæra & Philita. Dicitur autem Primaria, quòd primum obtineat locum inter ludos Aleæ, seu pulchritudine, seu, quòd ex quatuor consistet, quasi coniugationibus primis, & ad numerum elementorum, ex quibus componitur, non autem mundi. Continet autem varietatis miras.

CAPVT II.

De Ludorum conditionibus.

SVNT autem spectanda conditio Ludentis, scollusoris, Ludi ipsius, pecuniæ, quibus certatur locus, & occasio; tantum autem potest hæc, vt liceuerit in epulis mortuorum ludere. Vnde titulus est apud Iuriscultos de sumptibus funerum, & ludo Aleæ: aliàs damnatus legibus, Titia, & Cornelia. Itaque videtur in grauioribus curis, ac mœroribus non tam licere, quam expedire. Permittiturque vincētis, & supplicio vltimo afficiendis, & ægris, & idèd & Lex in luctu permittebat. Quòd si qua est occasio, nulla certè tam digna est excusatione. Et mihi cum putarem ex longa tæbe instare mortem, non parum contulit assidèd ludere Aleã. Impositus est tamen modus, circa pecuniæ quantitatem, aliàs certè nunquam ludere licet: quòd quam sumunt excusationem de leniendo tædio temporis, vtilius id fiet lectionibus lepidis, aut narrationibus fabularum, vel historiarum, vel artificii quibusdam pulchris, nec laboriosis; inter quæ etiam lyra, vel cheli pulsare, aut canere, carminaque componere, vti-

lius fuerit, atque id ob tres causas; Prima, quòd huiusmodi intermissio seriarum actionum laudabilior est, quam Ludi, vt quæ vel faciat aliquid, vt Pictura, vel sit secundum naturam, vt Musica, vel homo aliquid discat, vt legendo audiendove fabulas, & historiasve. Secunda, quòd non sit sine labore, & idèd non inuitis nobis, plus temporis nobis eripiat, quam par sit: Tempus autem, (vt Seneca aiebat) & rectè dum de longitudine, & breuitate vitæ loquitur, res est charissima. Tertia, quòd honestius sit otium illud, & non mali exempli, quemadmodum est ludus, & maximè apud filios, & domesticos. His accedit, quòd Ludus iram mouet, turbat mentem, & quandoque homo erumpit ad certamen pecuniæ, quòd turpissimum est, periculosum, & Legibus prohibitum. Denique soli non possumus ludere; at huiusmodi oblectamentis etiam soli delectari possumus.

CAPVT III.

Quibus, & quando magis conueniat ludere.

ITaque si persona sit prudens, senex, in Magistratu posita, & togata, aut Sacerdotio insignis, minus decet ludere, vt contra pueros non adèd dedecet, & adolescentes, & milites. Quanto autem maior est pecunia, èd turpius, *Vt superabatur quidam summo Sacerdotio fungens, (Cardinalem vocant)* quod quina millia coronatorum cum Mediolanensibus Regulo lusisset post cœnam; quòd vitium nunc detestabile est Principibus; nec defenditur nisi ab aulicis ipsis, & Adulatoribus, seu ob timorem, seu quia munera accipiunt, si felix cadat Alea: Interim spoliantur subditi, & pauperes auxiliis illis delegatis, & debitis fraudantur; si vincant prodiguntur pecuniæ Ludo parte si vincatur, aut ad pauperem redigitur, si impotens sit, & alioquin probus, aut ad rapinam, si potens improbusque, aut ad laqueum, si pauper, & improbus; collusor quoque infamis, vel humilis conditionis, & Ludo assuetus turpior, & etiam damnosior; nam si cum huiusmodi viris luseris attentius, luser euades; sin minus vsu, dolo, calliditateque spoliaberis. Collusoris conditio, raritas ludendi, & breuitas, & locus, & paucitas pecuniarum, & occasio, vt in diebus festis in conuiujs. Persona vt

Cardano, *Liber de ludo aleae*

Struttura

32 brevi capitoli

cap. 1-8, 10: considerazioni su vari aspetti del gioco

cap. 9, 11-15: gioco dei dadi

cap. 16-30, 32: giochi di carte

cap. 31: astragali

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 9: giochi con dadi di sei facce

- in sei tiri si dovrebbero verificare i sei punti
- introduzione delle nozioni di “circuito”, come insieme di tutti i lanci possibili, e di “uguaglianza”, come situazione di simmetria tra i lanci possibili
- esempio: caso dei tre punti (1, 3, 5) che si presentano con la stessa facilità dei tre punti (2, 4, 6)

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 11: gioco con due dadi di sei facce

– presenza di sei punteggi con facce uguali:

$(1,1)$, $(2,2)$, $(3,3)$, $(4,4)$, $(5,5)$, $(6,6)$,

– di 15 punteggi con facce disuguali: $(1,2)$, $(1,3)$, $(1,4)$, ...
, $(4,6)$, $(5,6)$

– e di altri 15 punteggi simmetrici con facce disuguali.

Si hanno in tutto 36 possibilità diverse.

– il numero di lanci contenenti almeno un 1 è 11 rispetto al circuito di 36.

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 12: gioco con tre dadi di sei facce

1. tre facce uguali: (1, 1, 1), ..., (6, 6, 6)

2. due facce uguali e una diversa:

(1, 1, 2), ..., (1, 1, 6)

(2, 2, 1), ..., (2, 2, 6)

(3, 3, 1), ..., (3, 3, 6)

(4, 4, 1), ..., (4, 4, 6)

(5, 5, 1), ..., (5, 5, 6)

(6, 6, 1), ..., (6, 6, 5)

sono in tutto 30 (essendoci 6 possibilità per le facce uguali e 5 per le altre);

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 12: gioco con tre dadi di sei facce

ogni tripla occorre 3 volte (per esempio, (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)); dunque, in totale sono 90.

3. tre facce differenti

(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6), ...

che sono in tutto 20; ognuna di queste può variare 6 volte (considerando le loro permutazioni). Dunque, sono in totale 120.

– Facendo il conteggio totale: $6+90+120=216$.

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 13: questioni sulla somma di punti

caso di due dadi

– per esempio, il punteggio 10 si può avere in due modi, (4,6) e (5,5), ma il primo ha il reciproco (6,4) e si hanno dunque 3 possibilità sulle 36 complessive, ovvero $1/12$ del ‘circuitto’ e $1/6$ della ‘uguaglianza’.

caso di tre dadi

– ragionamenti analoghi con calcoli svolti caso per caso, come nella tabella.

Cardano,

Liber de ludo aleae

cap. 13: tabella sulla somma di
punti nel caso di tre dadi

3	18	1
4	17	3
5	16	6
6	15	10
7	14	15
8	13	21
9	12	25
10	11	27

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 31: astragali, quattro facce 1, 3, 4, 6

lanci con 4 astragali:

1. facce tutte uguali

(1, 1, 1, 1), (3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4) (6, 6, 6, 6)

in totale, 4.

2. tre facce uguali

(1, 1, 1, 3), (1, 1, 1, 4), (1, 1, 1, 6),

(3, 3, 3, 1), (3, 3, 3, 4), (3, 3, 3, 6),

(4, 4, 4, 1), (4, 4, 4, 3), (4, 4, 4, 6),

(6, 6, 6, 1), (6, 6, 6, 3), (6, 6, 6, 4)

che sono in tutto 12; ognuna di queste può variare 4 volte. Dunque, sono in totale 48.

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 31: astragali

3. due facce uguali a coppie (tipo1)

(1, 1, 3, 3), (1, 1, 4, 4), (1, 1, 6, 6),
(3, 3, 4, 4), (3, 3, 6, 6), (4, 4, 6, 6)

che sono in tutto 6; ognuna può variare 6 volte. Dunque, sono in totale 36.

4. due facce uguali (tipo2)

(1, 1, 3, 4), (1, 1, 3, 6), (1, 1, 4, 6),
(3, 3, 1, 4), (3, 3, 1, 6), (3, 3, 4, 6),
(4, 4, 1, 3), (4, 4, 1, 6), (4, 4, 3, 6),
(6, 6, 1, 3), (6, 6, 1, 4), (6, 6, 3, 4)

che sono in tutto 12; ognuna di queste può variare 12 volte. Dunque, sono in totale 144.

Cardano, *Liber de ludo aleae*

cap. 31: astragali

5. facce tutte diverse

(1, 3, 4, 6)

che sono in tutto 24.

Conto finale: $4 + 48 + 36 + 144 + 24 = 256$

Tipo 1 \rightarrow 4

Tipo 2 \rightarrow 48

Tipo 3 \rightarrow 36

Tipo 4 \rightarrow 144

Tipo 5 \rightarrow 24

Galileo,
*Considerazione
sopra il giuoco de'
dadi*

354

CONSIDERAZIONE

DI GALILEO GALILEI

SOPRA IL GIUOCO DE' DADI.



Che nel giuoco dei dadi alcuni punti sieno più vantaggiosi di altri, vi ha la sua ragione assai manifesta, la quale è, il poter quelli più facilmente e più frequentemente scoprirsi, che questi, il che dipende dal potersi formare con più sorte di numeri: onde il 3. e il 18. come punti, che in un sol modo si posson con tre numeri comporre, cioè questi con 6. 6. 6. e quelli con 1. 1. 1. e non altrimenti, più difficili sono a scoprirsi, che v. g. il 6. o il 7. li quali in più maniere si compongono, cioè il 6. con 1. 2. 3. e con 2. 2. 2.

Galileo,
*Considerazione sopra
 il giuoco de' dadi*

e con 1. 1. 4. ed il 7 con 1. 1. 5., 1. 2. 4., 1. 3. 3., 2. 2. 3. Tuttavia ancorchè il 9. e il 12. in altrettante maniere si componano in quante il 10. e l' 11. perlochè d' egual uso dovriano esser reputati; si vede nondimeno, che la lunga osservazione ha fatto dai giuocatori stimarsi più vantaggiosi il 10. e l' 11. che il 9., e il 12.

E che il 9. e il 10. si formino (e quel che di questi si dice intendasi de' lor soprasi 12. e 11.) si formino dico con pari diversità di numeri, è manifesto; imperocchè il 9. si compone con 1 2. 6., 1 3. 5., 1. 4. 4., 2. 2. 5., 2. 3. 4., 3. 3. 3. che sono sei triplicità, ed il 10. con 1. 3. 6., 1. 4. 5., 2. 2. 6., 2. 3. 5., 2. 4. 4., 3. 3. 4. e non in altri modi, che pur son sei combinazioni. Ora io per servire a chi m'ha comandato, che io debba produr ciò, che sopra tal difficoltà mi sovviene, esporrò il mio pensiero, con isperanza, non solamente di sciorre questo dubbio, ma di aprire la strada a poter puntualissimamente scorgere le ragioni, per le quali tutte le particolarità del giuoco sono state con grande avvedimento e giudizio compartite ed aggiustate. E per condurmi colla maggior chiarezza che io possa al mio fine, comincio a considerare, come essendo un dado, terminato da 6. facce, sopra ciascuna delle quali gettato, egli può indifferentemente fermarsi; sei vengono ad essere le sue scoperte, e non più, l' una dif-

Galileo,
*Considerazione sopra
il giuoco de' dadi*

ferente dall' altra. Ma se noi insieme col primo getteremo il secondo dado, che pure ha altre sei facce, potremo fare 36. scoperte tra di loro differenti, poichè ogni faccia del primo dado può accoppiarsi con ciascuna del secondo, ed in conseguenza fare 6. scoperte diverse; onde è manifesto tali combinazioni esser sei volte 6. cioè 36. E se noi aggiugneremo il terzo dado, perchè ciascuna delle sue facce, che pur son sei, può accoppiarsi con ciascuna delle 36. scoperte degli altri due dadi, averemo le scoperte di tre dadi essere 6. volte 36. cioè 216. tutte tra di loro differenti. Ma perchè i punti dei tiri di tre dadi non sono, se non 16. cioè 3. 4. 5. sino a 18. tra i quali si hanno a compartire le dette 216. scoperte, è necessario, che ad alcuni di essi ne tocchino molte; e se noi ritroveremo quante ne toccano per ciascheduno, averemo aperta la strada di scoprire quanto cerchiamo, e basterà fare tale investigazione dal 3. sino al 10. perchè quello, che converrà a uno di questi numeri, converrà ancora al suo sossopra.

Tre particolarità si debbon notare per chiara intelligenza di quello che resta: la prima è, che quel punto dei tre dadi, la cui composizione risulta da tre numeri eguali, non si può produrre, se non da una sola scoperta, ovvero tiro di dadi, e così il 3. non si può formare se non dalle tre facce dell' asso, ed il 6. quando si

Galileo,
*Considerazione sopra
il giuoco de' dadi*

357
dovesse comporre con tre dui, non si farebbe se non da una sola scoperta. Seconda: il punto, che si compone dai tre numeri, due de' quali sieno i medesimi, e il terzo diverso; si può produrre da tre scoperte, come v. g. il 4. che nasce dal 2. e dalli due assi, può farsi con tre cadute diverse, cioè quando il primo dado scuopra 2. e il secondo e terzo scuoprano asso, o scuoprendo il secondo dado 2., e il primo e il terzo asso; o scuoprendo il terzo 2., ed il primo e secondo asso. E così v. g. l'8. in quanto resulta da 3. 3. 2. può prodursi parimente in tre modi; cioè scuoprendo il primo dado 2. e gli altri 3. per uno, o scuoprendo il secondo dado 2. ed il primo e terzo 3. o finalmente scuoprendo il terzo dado 2. ed il primo e secondo 3. Terza: quel numero di punti, che si compone di tre numeri differenti, può prodursi in 6. maniere, come per esempio, l'8. mentre si compone da 1. 3. 4. si può fare con 6. scoperte differenti; prima, quando il primo dado faccia 1. il secondo 3. e il terzo 4. seconda, quando il primo dado faccia pur 1. ma il secondo 4. e il terzo 3. terza, quando il secondo dado faccia 1. e il primo 3. e il terzo 4. quarta, facendo il secondo pur 1. e il primo 4. e il terzo 3. quinta, quando facendo il terzo dado 1. il primo faccia 3. e il secondo 4. sesta, quando sopra l'1 del terzo dado, il primo

Galileo,
*Considerazione sopra
il giuoco de' dadi*

358

farà 4. e il secondo 3. Abbiamo dunque sin qui dichiarati questi tre fondamenti, primo, che le triplicità, cioè il numero delle scoperte dei tre dadi, che si compongono da tre numeri eguali, non si producono se non in un modo solo; secondo, che le triplicità che nascono da due numeri eguali, e dal terzo differente, si producono in tre maniere; terzo, che quelle che nascono da tre numeri tutti differenti, si formano in sei maniere. Da questi fondamenti facilmente raccorremo in quanti modi, o vogliam dire, in quante scoperte differenti si posson formare tutti i numeri dei tre dadi, il che per la seguente tavola facilmente si comprende, in fronte della quale sono notati i punti dei tiri dal 10. in giù sino al 3. e sotto essi le triplicità differenti, dalle quali ciascuno di essi può risultare, accanto alle quali son posti i numeri, secondo i quali ciascuna triplicità si può diversificare, sotto i quali è finalmente raccolta la somma di tutti i modi possibili a produrre essi tiri, come per esempio:

Galileo,
*Considerazione sopra
il giuoco de' dadi*

360

nella prima casella abbiamo il punto 10. e sotto di esso 6. triplicità di numeri, con i quali egli si può comporre, che sono 6. 3. 1., 6. 2. 2., 5. 4. 1., 5. 3. 2., 4. 4. 2., 4. 3. 3. E perchè la prima triplicità 6. 3. 1. è composta di tre numeri diversi, può (come sopra si è dichiarato) esser fatta da 6. scoperte di dadi differenti; però accanto ad essa triplicità 6. 3. 1. si nota 6. ed essendo la seconda 6. 2. 2. composta di due numeri eguali, e di un altro diverso, non può prodursi se non in 3. differenti scoperte, però se gli nota accanto 3. la terza triplicità 5. 4. 1. composta di tre numeri diversi può farsi da 6. scoperte, onde si nota col numero 6. e così dell'altre tutte, e finalmente a piè della colonnetta de' numeri delle scoperte è raccolta la somma di tutte: dove si vede, come il punto 10. può farsi da 27. scoperte di dadi differenti, ma il punto 9. da 25. solamente, e l' 8. da 21., il 7. da 15., il 6. da 10., il 5 da 6., il 4. da 3., e finalmente il 3. da 1. le quali tutte sommate insieme ascendono al numero di 108. Ed essendo altrettante le scoperte dei sottosopri, cioè dei punti 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. si raccoglie la somma di tutte le scoperte possibili a farsi colle facce dei tre dadi, che sono 216. E da questa tavola potrà ognuno ch'intenda il giuoco, andar puntualissimamente misurando tutti i vantaggi per minimi che sieno delle zarc,

Il problema delle parti

Due giocatori giocano a un gioco casuale, avendo messo inizialmente una posta. Vince il primo che si aggiudica un numero determinato di partite. Se essi devono lasciare il gioco prima che esso sia concluso, ci si chiede come deve essere divisa la posta totale.

- varie formulazioni e tentativi di risoluzione (tra cui, Luca Pacioli, Cardano, Tartaglia)
- considerazione del numero di partite vinte dai giocatori

PREMIÈRE LETTRE

DE PASCAL A FERMAT (*).

MONSIEUR,

L'impatience me prend aussi-bien qu'à vous ; et quoique je sois encore au lit , je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir , de la part de M. de Carcavi , votre lettre sur les partis , que j'admire si fort , que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'entendre ; mais en un mot vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait ; car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité , après la rencontre admirable où je me trouve avec vous. J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés : j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés , comme M. le chevalier de Meré , qui est celui qui m'a proposé ces questions , et aussi M. de Roberval ; mais M. de Meré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties , ni de biais pour

(*) Tirée du Recueil des Oeuvres de Fermat. Il paroît que cette Lettre avoit été précédée par d'autres sur la même matière ; mais je n'ai pu les recouvrer.

Pascal a Fermat,
29 luglio 1654

Pascal a Fermat, 29 luglio 1654

Ecco, pressappoco, come faccio per sapere il valore di ciascuna partita, quando due giocatori giocano, per esempio, tre partite e ciascuno ha messo in gioco 32 monete. Supponiamo che il primo ne abbia due e l'altro una; essi giocano adesso una partita di cui la sorte è tale che se la vince il primo, egli guadagna tutto il denaro che è in gioco, cioè 64 monete; se la vince l'altro, essi sono a due a due e di conseguenza, se essi si vogliono separare, è necessario che ciascuno ritira la sua posta, cioè ciascuno 32 monete. Considerate, dunque, signore, che se il primo vince, gli toccano 64 (monete); se egli perde gli toccano 32 (monete). Dunque se essi vogliono arrischiare questa partita e separarsi senza giocarla, il primo deve dire:

Pascal a Fermat, 29 luglio 1654

“io sono sicuro di avere 32 monete, poiché la perdita stessa me le dà; ma per le altre 32, può essere che le avrò io, può essere che le avrete voi; il rischio è uguale; dividiamo dunque queste 32 monete a metà e datemi, oltre queste, le mie 32 che sono per me sicure”. Egli avrà dunque 48 monete e l’altro 16.

Supponiamo adesso che il primo abbia due partite e l’altro nessuna, e che essi comincino a giocare una partita. La sorte di questa partita è tale che se la vince il primo egli prende tutto il denaro, 64 monete; se la vince l’altro, eccoci ricondotti al caso precedente, nel quale il primo avrà due partite e l’altro una.

Pascal a Fermat, 29 luglio 1654

Ora noi abbiamo già mostrato che in questo caso spettano, a quello che ha le due partite, 48 monete: dunque se essi non vogliono giocare questa partita, egli deve dire così: “Se io la vinco, guadagnerò tutto, che è 64; se la perdo, mi apparterrà legittimamente 48; datemi dunque le 48 monete che mi sono certe nel caso che io perda e dividiamo le altre 16 a metà, perché c’è lo stesso rischio che le vinciate voi come che le vinca io”. Così egli avrà 48 e 8, che sono 56 monete.

Supponiamo infine che il primo non abbia che una partita e l’altro nessuna.

Pascal a Fermat, 29 luglio 1654

Voi vedete, signore, che se essi cominciano una nuova partita, la sorte è tale che, se il primo la vince, egli avrà appunto due partite e pertanto, per il caso precedente, gli apparterranno 56 (monete), se egli la perde, essi sono pari: dunque, gli appartengono 32 monete. Dunque egli deve dire: “Se non la volete giocare, datemi 32 monete, che mi sono sicure, e dividiamo il resto di 56 a metà. Da 56 togliete 32, resta 24; dividete 24 a metà, prendetene 12, e io 12, che con 32, fanno 44”.

Ora, in questo modo, voi vedete mediante le semplici sottrazioni che, per la prima partita, gli appartengono 12 monete; per la seconda altre 12; e per l'ultima 8.

Pascal a Fermat, 29 luglio 1654

Caso 1

$$A_{-1}B_{-2} \begin{cases} \text{se vince } A & (64, 0) \\ \text{se vince } B & (32, 32) \end{cases}$$

$$A \rightarrow 32 + \frac{1}{2}32 = 48$$

$$B \rightarrow 64 - 48 = 16$$

Caso 2

$$A_{-1}B_{-3} \begin{cases} \text{se vince } A & (64, 0) \\ \text{se vince } B & (48, 16) \end{cases}$$

$$A \rightarrow 48 + \frac{1}{2}16 = 56$$

$$B \rightarrow 64 - 56 = 8$$

Pascal a Fermat, 29 luglio 1654

Caso 3

$$A_{-2}B_{-3} \begin{cases} \text{se vince } A & (56, 8) \\ \text{se vince } B & (32, 32) \end{cases}$$

$$A \rightarrow 32 + \frac{1}{2} 24 = 44$$

$$B \rightarrow 64 - 44 = 20$$

DEUXIÈME LETTRE

DE PASCAL A FERMAT (*).

MONSIEUR,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs, par l'ordinaire passé; et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci, cette admirable convenance qui étoit entre nous, et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir; car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je veux vous ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement; car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très-sûre; mais quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte, et dont je me sers partout, est commune à toutes les conditions ima-

Pascal a Fermat,
24 agosto 1654

(*) Tirée du Recueil des Oeuvres de Fermat.

Pascal a Fermat, 24 agosto 1654

Ecco come voi procedete quando ci sono due giocatori.

Se due giocatori, giocando in più partite, si trovano in questa situazione che mancano due partite al primo e tre al secondo, per trovare la spartizione, è necessario (dite voi) vedere in quante partite il gioco sarà assolutamente deciso. E' agevole valutare che ciò sarà in quattro partite, da dove voi concludete che è necessario vedere quanti esiti possono avere quattro partite tra due giocatori e vedere quante sono le combinazioni per far vincere il primo e quante per il secondo e dividere il denaro seguendo questa proporzione.

Pascal a Fermat, 24 agosto 1654

Avrei fatto fatica a capire questo discorso se non lo avessi saputo per conto mio da prima; e anche voi l'avevate scritto con questa idea.

Dunque per veder quanti esiti possono avere quattro partite tra due giocatori, è necessario immaginare che essi giochino con un dado a due facce (dato che non sono che due giocatori) come a testa o croce e che gettino quattro di questi dadi (poiché giocano in quattro partite); e adesso è necessario vedere quanti assetti differenti possono avere questi dadi. Questo è agevole da verificare: essi possono averne sedici che è la seconda potenza di quattro, cioè il quadrato.

Pascal a Fermat, 24 agosto 1654

Immaginiamo che una delle facce sia segnata a, favorevole al primo giocatore, e l'altra b, favorevole al secondo giocatore; dunque questi quattro dadi possono porsi in uno di questi sedici assetti: aaaa, ..., bbbb. E poiché mancano due partite al primo giocatore tutte le facce che hanno due a lo fanno vincere, dunque ce ne sono per lui 11; e poiché mancano tre partite al secondo, tutte le facce che hanno tre b lo possono far vincere; ce ne sono dunque 5. Dunque è necessario che essi dividano la somma come 11 a 5. Ecco il vostro metodo quando ci sono due giocatori (...).

Pascal a Fermat,
24 agosto 1654, Tabella

a	a	a	a	1
a	a	a	b	1
a	a	b	a	1
a	a	b	b	1
<hr/>				
a	b	a	a	1
a	b	a	b	1
a	b	b	a	1
a	b	b	b	2
<hr/>				
b	a	a	a	1
b	a	a	b	1
b	a	b	a	1
b	a	b	b	2
<hr/>				
b	b	a	a	1
b	b	a	b	2
b	b	b	a	2
b	b	b	b	2

Pascal, 1654 (1665)

TRAITE

DV TRIANGLE
ARITHMETIQUE,
AVEC QUELQUES AVTRES

PETITS TRAITES SVR LA
MESME MATIERE.

Par Monsieur PASCAL.



A PARIS,
Chez GvILLAVME DESPREZ, rue saint Iacques,
à Saint Prosper.

M. DC. LXV.

Riviere
V

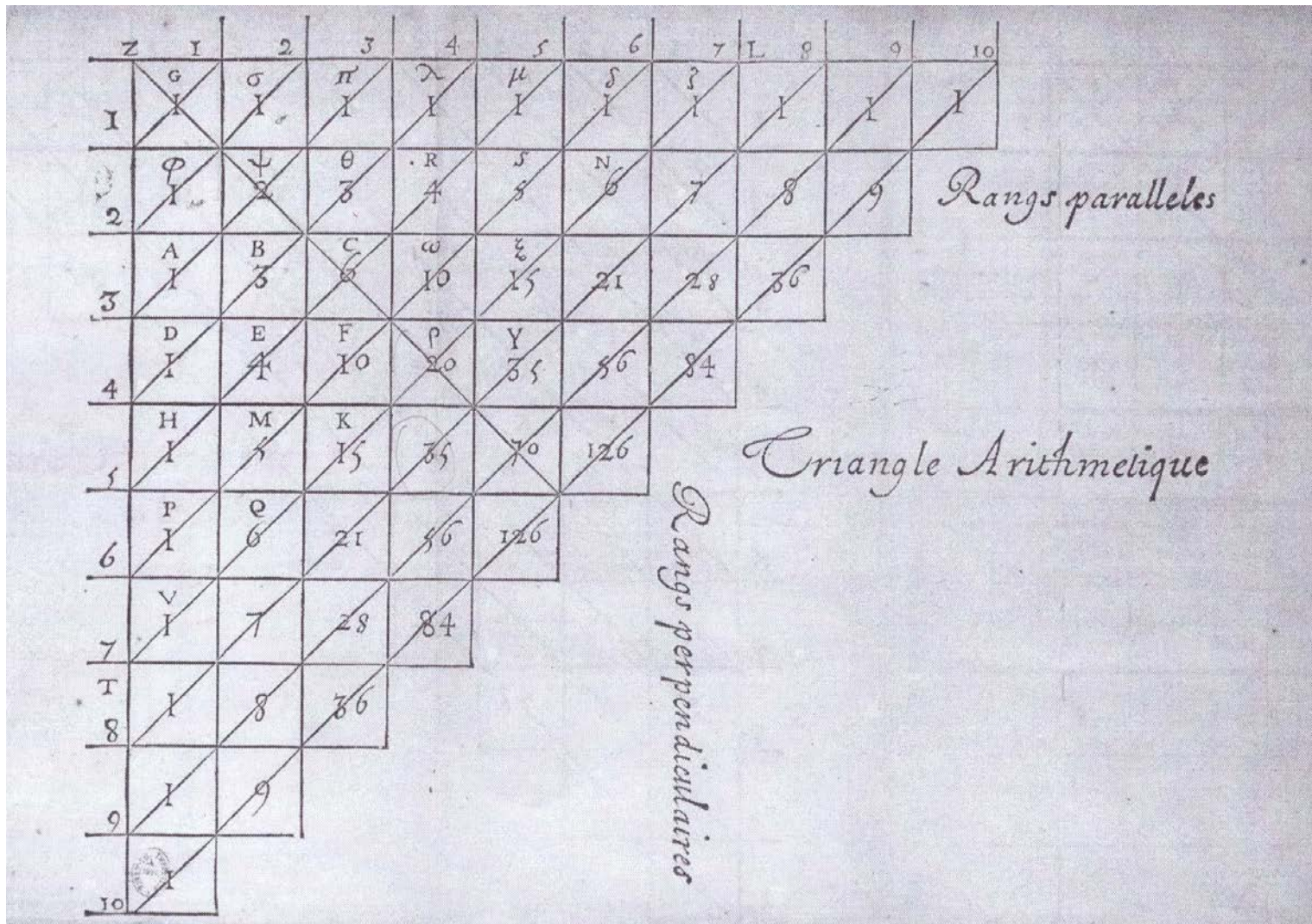
Jan 860

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

TABLE DES TRAITÉZ
contenus dans ce Recüeil.

- I. **T**raité du Triangle Arithmetique.
- II. Diuers usages du Triangle Arithmetique, dont le Generateur est l'unité. Sçauoir:
Usage du Triangle Arithmetique pour les ordres Numeriques.
Usage du Triangle Arithmetique pour les Combinaisons.
- III. Usage du Triangle Arithmetique, pour determiner les partis qu'on doit faire entre deux ioueurs qui iouent en plusieurs parties.
- IV. Usage du Triangle Arithmetique pour trouuer les puissances des Binomes & Apotomes.
- V. Traité des ordres Numeriques.
- VI. De numericis ordinibus tractatus.
- VII. De numerorum continuorum productis, seu, de numeris qui producuntur ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium.
- VIII. Numericarum potestatum Generalis resolutio.
- IX. Combinationes.
- X. Potestatum Numericarum summa.
- XI. De numeris multiplicibus, ex sola Characterum numericorum additione agnoscendis.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)





TRAITTE' DV TRIANGLE
ARITHMETIQUE,
DEFINITIONS.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

L' Appelle Triangle Arithmetique, vne figure dont la construction est telle.

Je mene d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires, l'une à l'autre, GV, GZ, dans chacune desquelles ie prens tant que ie veux de parties égales, & continues à commencer par G, que ie nomme 1. 2. 3. 4. &c. & ces nombres sont les exposans des diuisions des lignes.

En suite ie ioints les points de la premiere diuision qui sont dans chacune des deux lignes, par vne autre ligne qui forme vn triangle dont elle est la base.

Je ioints ainsi les deux points de la seconde diuision par vne autre ligne, qui forme vn second triangle dont elle est la base.

Et ioignant ainsi tous les points de diuision, qui ont vn mesme exposant, i'en forme autant de triangles & de bases.

Je mene par chacun des points de diuision, des lignes paralleles aux costez, qui par leurs interseptions forment de petits quarez, que i'appelle Cellules.

Et les cellules qui sont entre deux paralleles qui vont de gauche à droit, s'appellent cellules d'un mesme rang parallele, comme les cellules, G, σ, π, &c. ou φ, ψ, θ, &c.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas, s'appellent, cellules d'un mesme rang perpendiculaire, comme les cellules G, φ, A, D, &c. & celles-cy, σ, ψ, B, &c.

Et celles qu'une mesme base trauese diagonalement sont dites cellules d'une mesme base, comme celles qui suiuent, D, B, θ, λ, & celles-cy, A, ψ, π.

Les cellules d'une mesme base également distantes de ses extremittez, sont dites reciproques, comme celles-cy, E, R, & B, θ. Parce que l'exposant du rang parallele de l'une, est le mesme que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paroist en cet exemple, ou E, est

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)



VSAGE DV TRIANGLE ARITHMETIQUE,
POUR LES COMBINAISONS.



Le mot de, *Combinaison*, a esté pris en plusieurs sens differens ; de sorte que pour oster l'equiuoque, ie suis obligé de dire comment ie l'entends.

Lors que de plusieurs choses, on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manieres d'en prendre autant qu'il est permis, entre toutes celles qui sont presentées, s'appellent icy, *les différentes combinaisons*.

Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, A, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques ; toutes les manieres d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent, *Combinaisons*.

Ainsi on trouuera par experience, qu'il y a six manieres différentes d'en choisir deux dans quatre; car on peut prendre, A & B, ou A & C, ou, A & D, ou B, & C, ou B & D, ou C, & D.

Ie ne conte pas, A, & A, pour vne des manieres d'en prendre deux, car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une repetée.

Ainsi ie ne conte pas A, & B, & puis, B & A, pour deux manieres différentes, car on ne prend en l'une & en l'autre maniere que les deux mesmes choses, mais d'un ordre différent seulement, & ie ne prends point garde à l'ordre; de sorte que ie pouois m'expliquer en un mot à ceux qui ont accoustumé de considerer les combinaisons, en disant simplement que ie parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre.

On trouuera de mesme par experience, qu'il y a quatre manieres de prendre trois choses dans quatre, car on peut prendre, A B C, ou A B D, ou A C D, ou B C D.

Enfin on trouuera qu'on n'en peut prendre quatre dans quatre qu'en vne maniere, sçauoir, A B C D.

Ie parleray donc en ces termes.

1	dans	4	se combine	4	fois.
2	dans	4	se combine	6	fois.
3	dans	4	se combine	4	fois.
4	dans	4	se combine	1	fois.

Où ainsi.

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.

Aduertissement.

On peut tirer de là beaucoup d'autres proportions que ie supprime, parce que chacun les peut facilement conclurre, & que ceux qui s'y voudront attacher en trouueront peut estre de plus belles que celles que ie pourrois donner. Je finis donc par le Probleme suiuant, qui fait l'accomplissement de ce traitté.

P R O B L E M E.

Estant donnez les exposans des rangs perpendiculaire & parallele d'une cellule, trouuer le nombre de la cellule, sans se seruir du Triangle Arithmerique.

Soit par exemple proposé de trouuer le nombre de la cellule ξ , du cinquiesme rang perpendiculaire, & du troiesime rang parallele.

Ayant pris tous les nombres qui precedent l'exposant du perpendiculaire 5. sçauoir 1, 2, 3, 4;

Soient pris autant de nombres naturels, à commencer par l'exposant du parallele 3, sçauoir 3, 4, 5, 6.

Soient multipliez les premiers l'un par l'autre, & soit le produit 24. Soient multipliez les autres l'un par l'autre, & soit le produit 360. qui diuisé par l'autre produit 24. donne pour quotient 15. Ce quotient est le nombre cherché.

Cat ξ est à la premiere de sa base V, en raison composée de toutes les raisons des cellules d'entre deux, c'est à dire,

ξ est à V, en raison comp. de ξ à ρ + ρ à K + K à Q + Q à V
 ou
 par la 12. Conseq. $\underbrace{3 \text{ à } 4. \quad 4 \text{ à } 3. \quad 5 \text{ à } 2. \quad 6 \text{ à } 1.}_{\text{}} \underbrace{\hspace{10em}}$

Donc ξ est à V Comme 3 en 4 en 5 en 6. à 4 en 3 en 2 en 1.

Mais V est l'vnité; donc ξ , est le quotient de la diuision du produit de 3 en 4 en 5 en 6. par le produit de 4 en 3 en 2 en 1.

Aduertissement.

Si le generateur n'estoit pas l'vnité, il eust fallu multiplier le quotient par le generateur.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

Per capire le regole delle parti, la prima cosa che è necessaria è considerare che il denaro che i giocatori hanno messo in gioco non appartiene più a loro, perché essi ne hanno lasciata la proprietà; ma essi hanno ricevuto in compenso il diritto di aspettarsi quello che il caso gli può dare, secondo le condizioni che essi hanno prima stabilito.

Ma, poiché è una legge volontaria, essi possono, in via amichevole, romperla; e così, in qualunque situazione si trovi il gioco, essi possono lasciarlo, e al contrario di quello che hanno fatto entrandoci, rinunciare all'attesa del caso, e rientrare ciascuno nella proprietà di qualche cosa. E in questo caso il regolamento di quello che deve loro appartenere deve essere proporzionale a quello che essi avevano diritto di sperare dalla fortuna (...).

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

Primo corollario

Se due giocatori giocano a un gioco puramente casuale, a condizione che se il primo vince otterrà una certa somma, e se perde gli arriverà una somma minore, se essi vogliono separarsi senza giocare e prendere ciascuno ciò che gli appartiene, la divisione è che il primo prende ciò che gli arriva in caso di perdita e inoltre la metà dell'eccesso di quanto ciò che gli arriverebbe in caso di vincita sorpassa ciò che otterrebbe in caso di perdita.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

Problema I – Proposizione I

Essendo proposti due giocatori, a ciascuno dei quali manchi un certo numero di partite per terminare, trovare mediante il triangolo aritmetico, la spartizione che è necessario fare (...) rispetto alle partite che mancano a ciascuno.

Sia presa nel triangolo la base nella quale ci sono tante celle quante partite mancano insieme ai due (giocatori): poi siano prese in questa base tante celle continue, a cominciare dalla prima, quante partite mancano al primo giocatore e si prenda la somma dei loro numeri. Dunque restano tante celle quante partite mancano all'altro. Si prende ancora la somma dei loro numeri.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

Queste somme stanno fra loro reciprocamente come i vantaggi dei giocatori; di modo che se la somma che essi giocano è uguale alla somma dei numeri di tutte le celle della base, apparterrà a ciascuno quello che è contenuto in altrettante celle quante partite mancano all'altro; e se essi giocano un'altra somma, ne apparterrà in proporzione.

Per esempio, si abbiano due giocatori, al primo dei quali manchino due partite e all'altro 4; è necessario trovare la spartizione.

Siano aggiunti questi due numeri 2 e 4, sia la loro somma 6; sia presa la sesta base del triangolo aritmetico Pd, nella quale ci sono di conseguenza sei celle P, M, F, w, S, d.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

Siano prese tante celle, a cominciare dalla prima P, quante partite manchino al primo giocatore, cioè le prime due P,M; dunque ne restano tante quante le partite dell'altro, cioè 4, F, w, S, d.

Dico che il vantaggio del primo sta al vantaggio del secondo come $F+w+S+d$ sta a $P+M$, cioè se la somma che si gioca è uguale a $P+M+F+w+S+d$, appartiene a quello al quale mancano due partite la somma delle quattro celle $d+S+w+F$ e a quello al quale mancano quattro partite, la somma delle due celle $P+M$. E se essi giocano un'altra somma, ne appartiene loro in proporzione.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

E, per dirlo in generale, qualunque somma essi giochino, appartiene al primo una porzione espressa da questa frazione $(F+w+S+d)/(P+M+F+w+S+d)$ il cui numeratore è la somma delle 4 celle dell'altro e il denominatore è la somma di tutte le celle; e all'altro (appartiene) una porzione espressa da questa frazione $(P+M)/(P+M+F+w+S+d)$ il cui numeratore è la somma delle due celle dell'altro e il denominatore è la stessa somma di tutte le celle.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665)

E se manca una partita all'uno, e 5 all'altro, appartiene al primo la somma delle prime 5 celle $P+M+F+w+S$ e all'altro la somma della cella d . E se mancano 6 partite all'uno e 2 all'altro, la spartizione si troverà nell'ottava base, nella quale le prime sei celle contengono ciò che appartiene a quel (giocatore) a cui mancano due partite, e le altre due appartengono a quello a cui ne mancano sei; e così all'infinito.

Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1654 (1665), 2

Lemma

Se due giocatori giocano un gioco d'azzardo, a condizione che se il primo vince gli apparterrà una porzione qualunque sulla somma che essi giocano, espressa da una frazione e che, se egli perde, gli apparterrà una porzione minore della stessa somma, espressa da un'altra frazione: se essi vogliono separarsi senza giocare, la condizione della spartizione si troverà in questo modo. Siano ridotte le due frazioni allo stesso denominatore, se esse non lo sono; sia presa una frazione il cui denominatore sia la somma dei due denominatori, e il denominatore doppio dei precedenti; questa frazione esprime la porzione che appartiene al primo (giocatore) sulla somma che è in gioco.