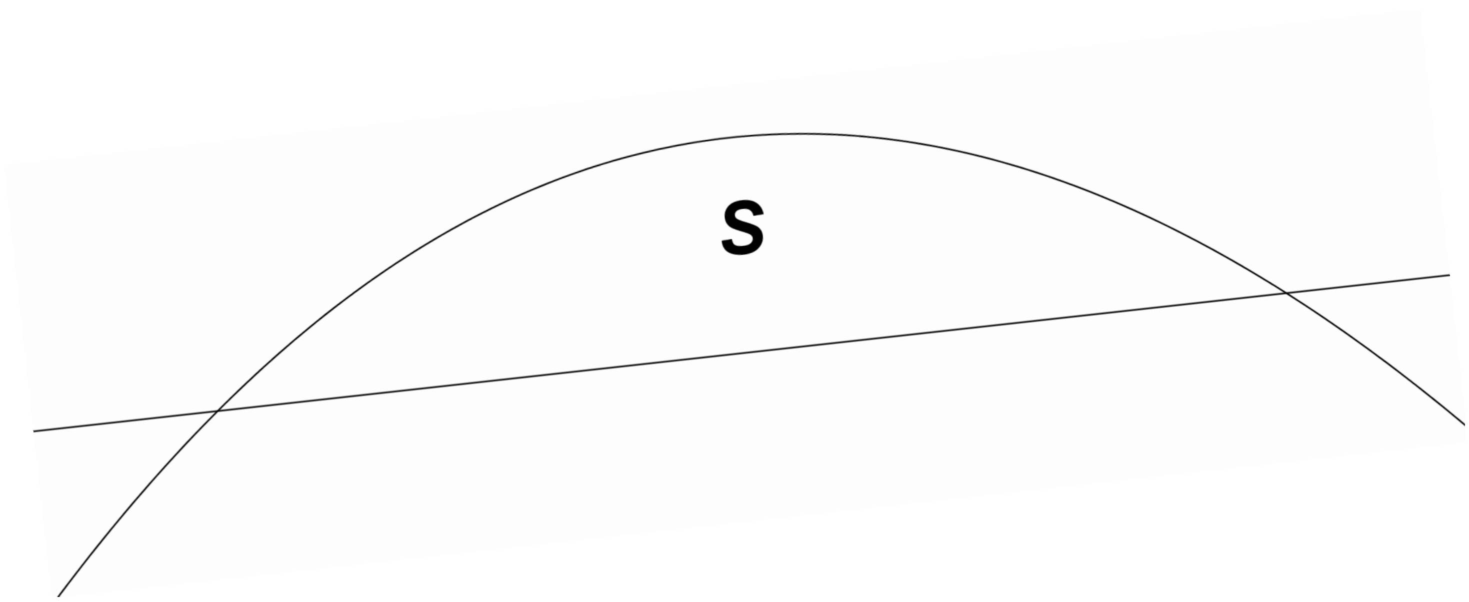
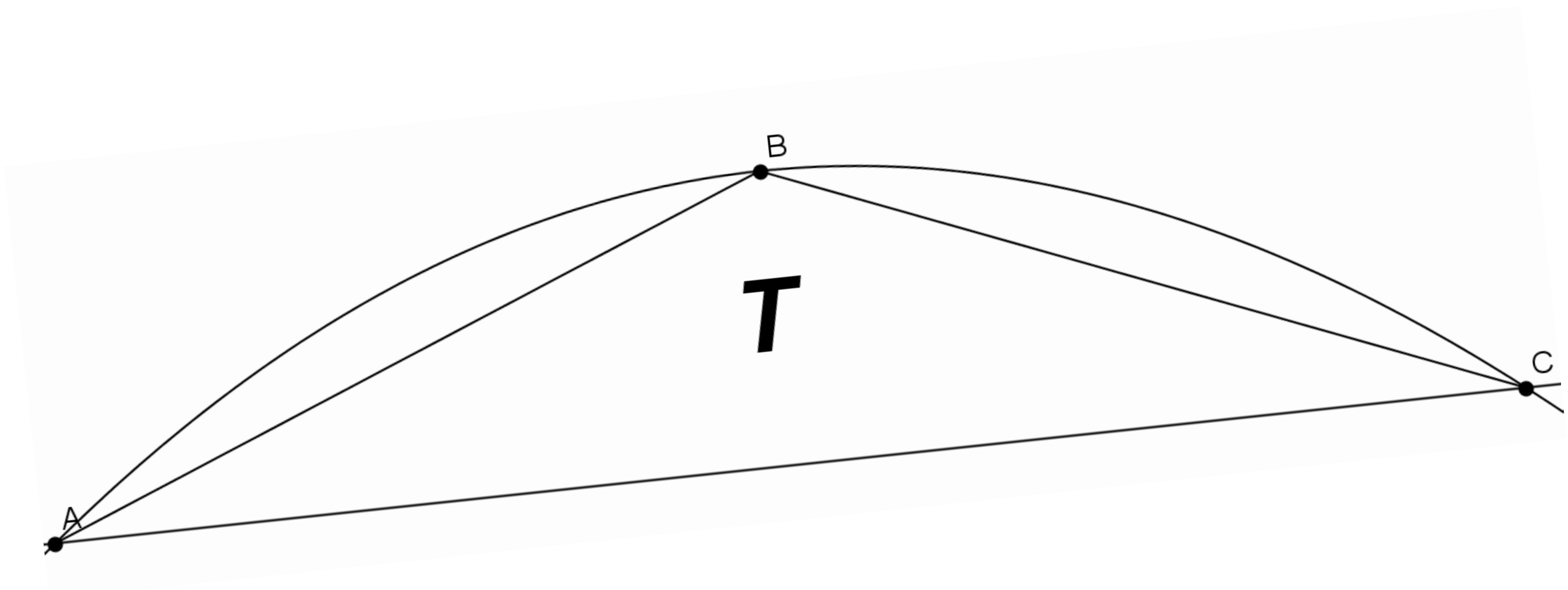
ARCHIMEDE
E L'AREA DEL
SEGMENTO PARABOLICO

IV B Liceo D'Ascanio
Prof.ssa Lucia Di Pasquale

Una parabola ed una sua secante individuano una parte di piano che chiamiamo **segmento parabolico**. Quanto vale l'area S del segmento parabolico?



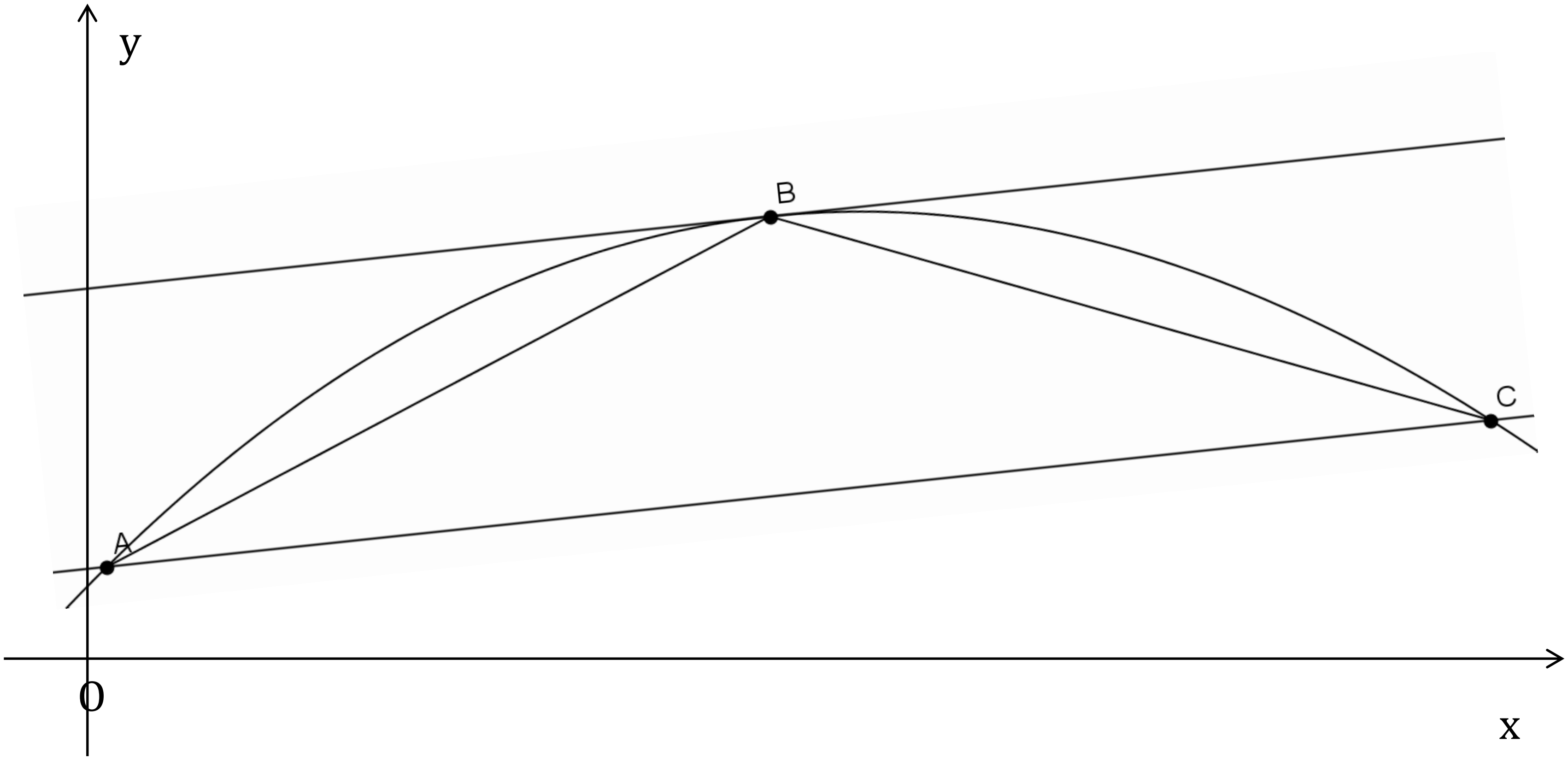
I libri di testo di terza liceo scientifico la mettono in relazione con l'area T del triangolo massimo inscritto nella parabola, che ha un lato pari alla corda staccata dalla secante



e affermano che: $S = 4/3\ T.$

Perché?

Nei libri di scuola generalmente non si trova nessun tipo di giustificazione: la parabola è inserita in un piano cartesiano e la legge fornita è finalizzata all'esercizio della ricerca della tangente ad una parabola, parallela ad una retta data.



Questo problema è stato affrontato da Archimede 23 secoli fa ed è interessante *riflettere su **come** egli lo abbia risolto.*

Ne “Il metodo”, rivolgendosi al suo amico Eratostene, direttore della biblioteca di Alessandria d’Egitto, Archimede spiega come l’utilizzo del concetto di leva e di equilibrio attorno ad un fulcro lo abbia condotto alla scoperta del valore dell’area del segmento parabolico.

Solo dopo averne conosciuto il valore, si preoccupa di fornire una dimostrazione rigorosa.

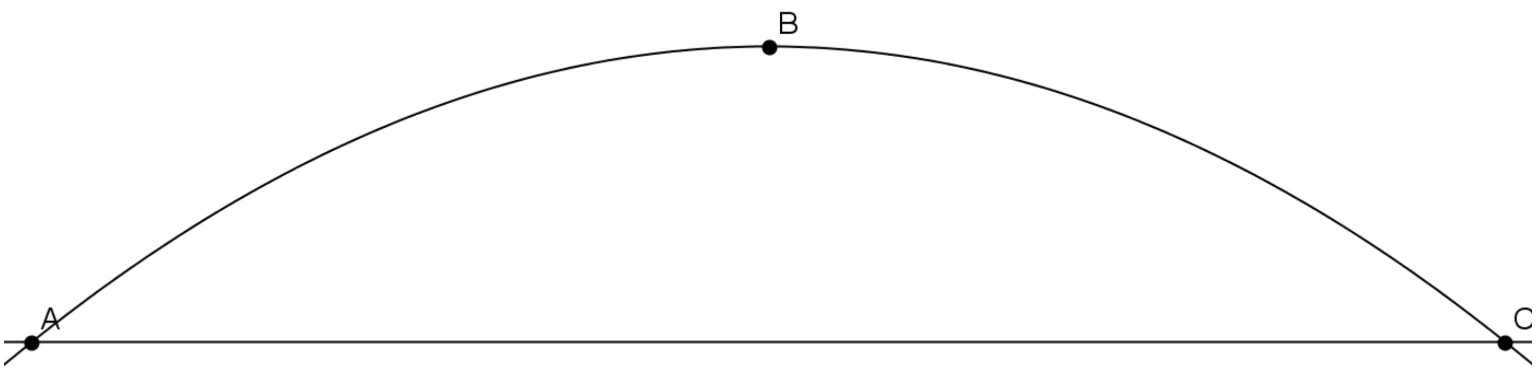
“Il metodo” è contenuto nel codice C di Archimede, insieme allo “Stomachion” e “Sui corpi galleggianti”.

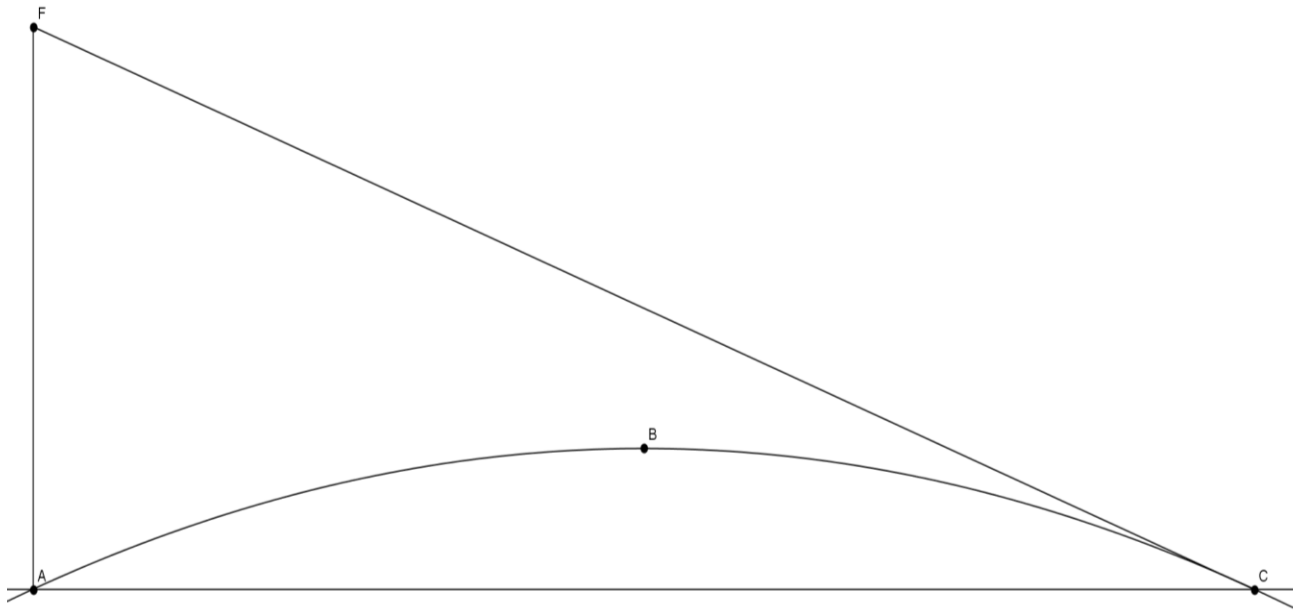
Questo codice è giunto fino a noi attraverso molte traversie: sembrava irrimediabilmente perduto quando nel 1906 in una biblioteca di Costantinopoli il filologo danese Johan Ludvig Heiberg trova un libro di preghiere cristiane del XIII secolo che studia accuratamente. Scopre che si tratta di un palinsesto, ovvero di un codice di pergamena utilizzato dagli amanuensi nel X secolo per copiare alcune opere di Archimede, successivamente cancellato e riutilizzato. La sensazionale notizia del ritrovamento viene riportata sulla prima pagina del “New York Times” il 16 luglio 1907.

Scomparso nuovamente, il 29 ottobre 1998 viene comprato da un privato per due milioni di dollari nella famosa casa d'aste Christie's di New York. Il giorno successivo il "New York Times" riporta la notizia della vendita in prima pagina.
Ecco come si presenta al momento della vendita all'asta:

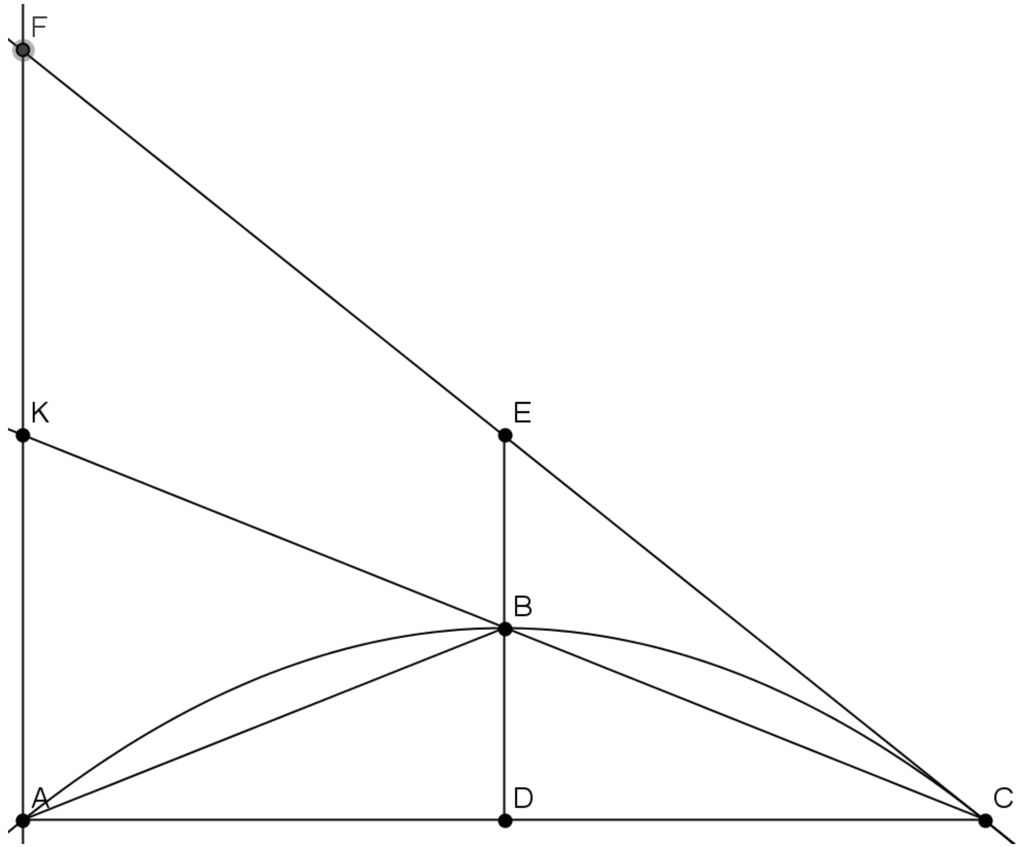
L'anonimo acquirente ha affidato il codice a due gruppi di studiosi: esperti di manoscritti ed esperti di matematica antica, per riportare alla luce gli scritti autentici di una delle menti più brillanti di tutti i tempi.
Reviel Netz e William Noel ne "Il codice perduto di Archimede" e nel sito www.archimedespalimpsest.org , raccontano come gli studiosi abbiano lavorato attorno a questo codice così malandato, ma dal valore inestimabile per tutta la comunità scientifica.
Da questo sito è tratta l'immagine riportata nella diapositiva precedente.
Attualmente il codice C è conservato nel Walters Art Museum di Baltimora.

Come riportato appunto da Reviel Netz e William Noel in “Il codice perduto di Archimede”, ma anche da Morris Kline in “Storia del pensiero matematico”, consideriamo dunque un arco di parabola ABC e la sua secante AC.



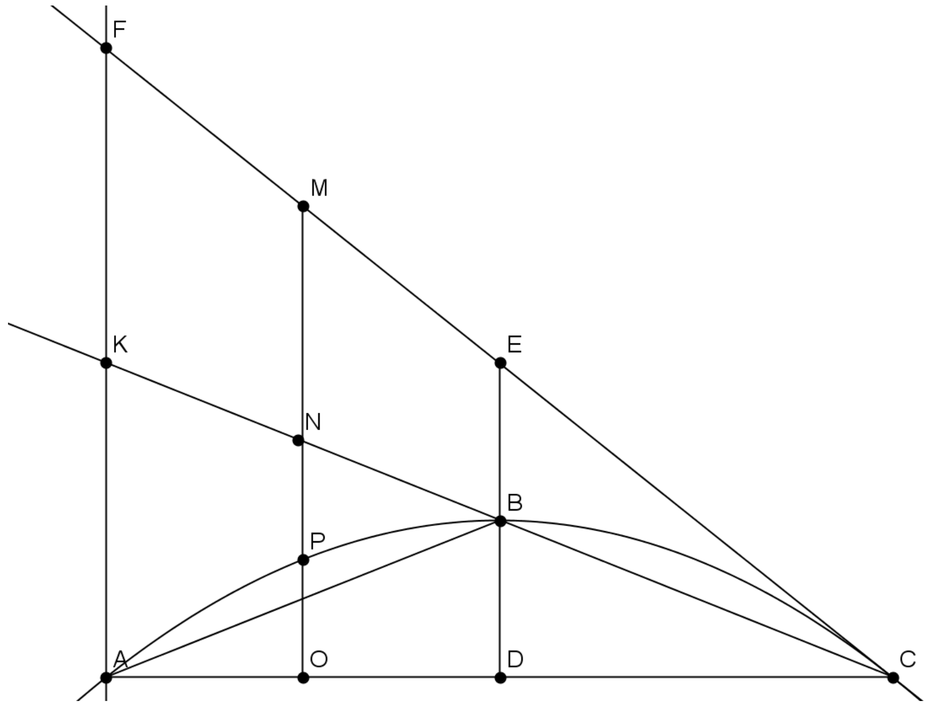


Inoltre consideriamo la tangente in C alla parabola e la parallela all'asse della parabola passante per A: esse si incontrano in un punto che chiameremo F.



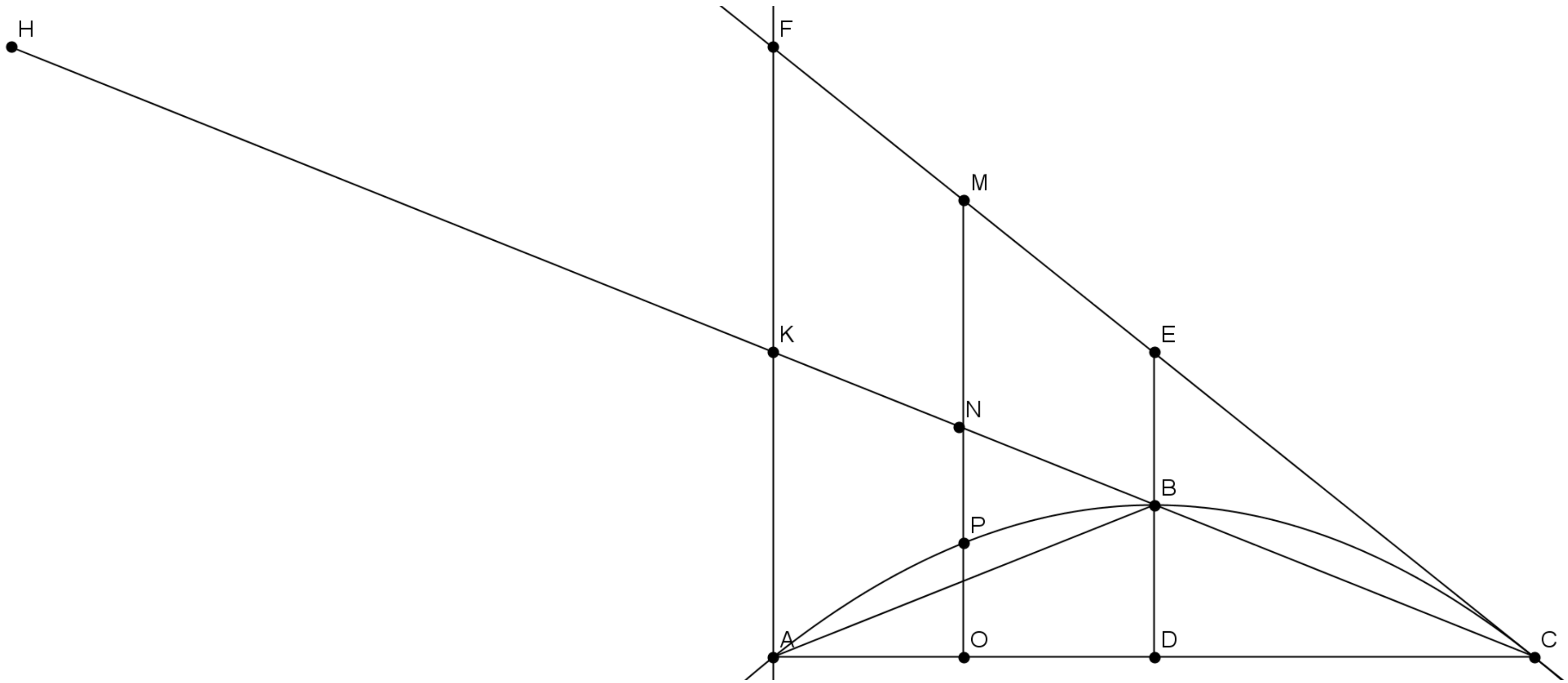
Tracciamo l'asse della parabola, esso incontra in D la corda AC e in E la tangente per C. Archimede afferma che EB = BD (a suo dire se ne trova giustificazione nelle opere di Euclide).

La retta AF interseca il prolungamento di BC in K. Si dimostra che AK = KF.



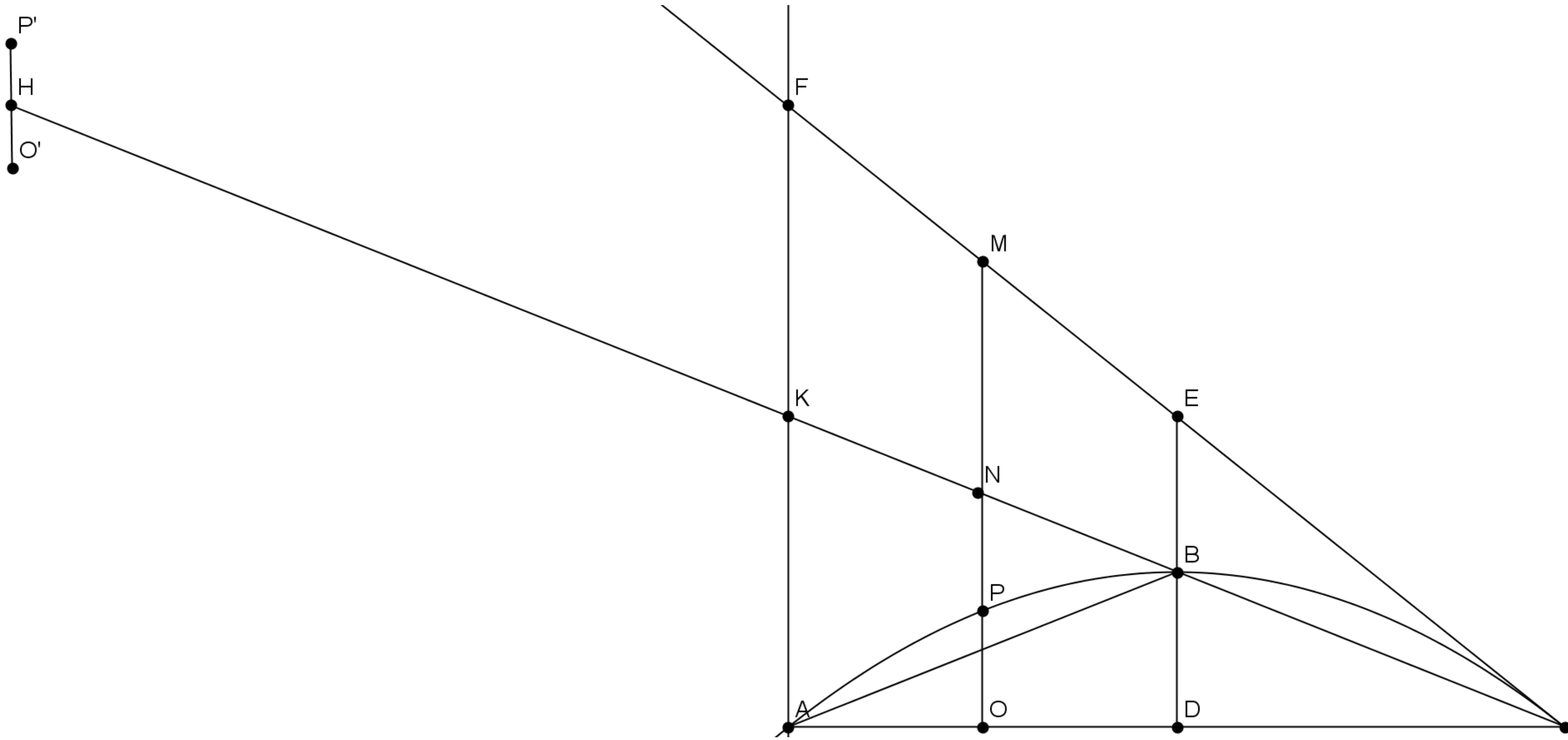
Archimede dimostra che, per ogni punto P dell’arco di parabola AC, staccata la parallela a FA per P fino ad incontrare CF in M, CK in N, la corda AC in O, vale la relazione:

AC : AO = MO: PO , ovvero: CK : KN = MO : PO.

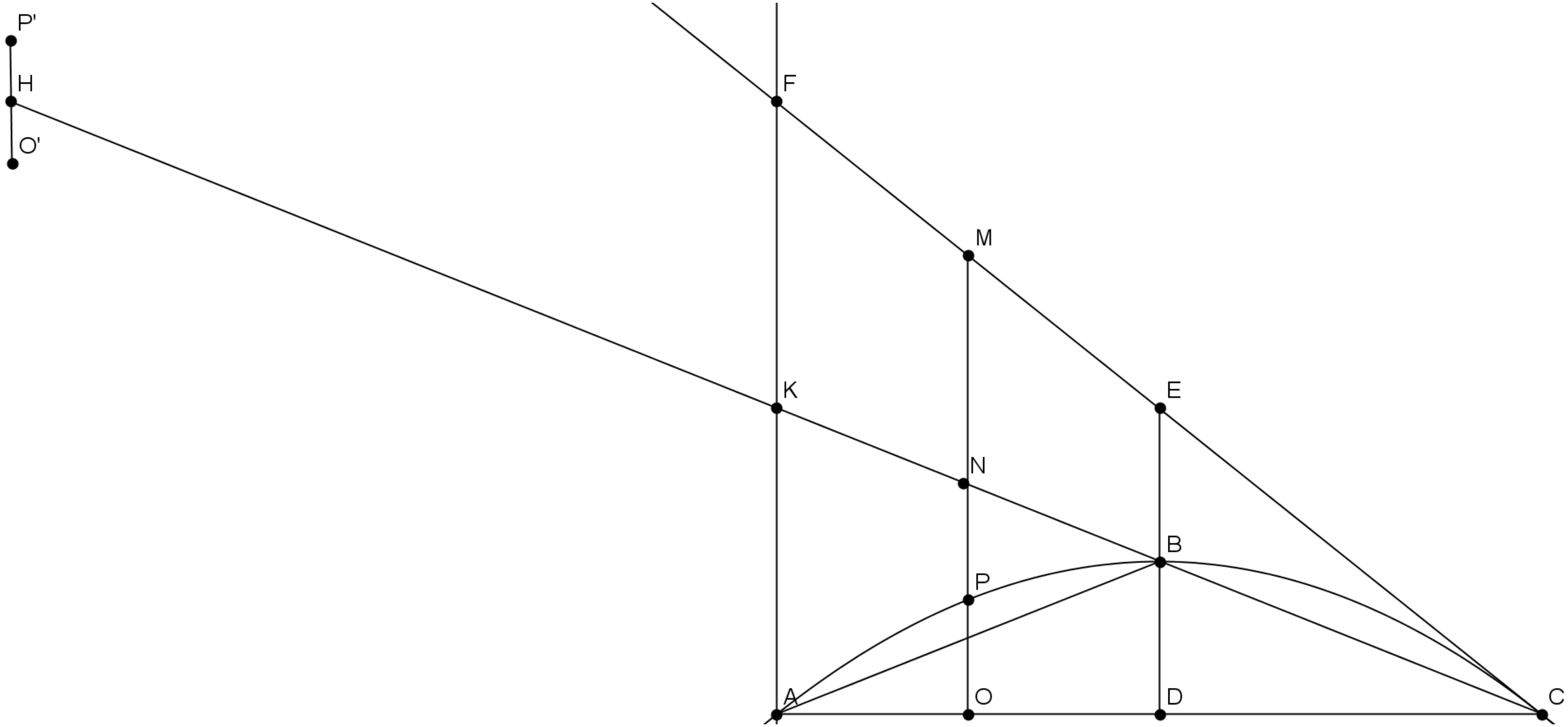


Prolunghiamo CK fino ad individuare H in modo tale che risulti: HK = CK.
Dunque, per ogni punto P dell’arco di parabola AC vale la relazione:

$$HK \cdot OP = KN \cdot MO.$$



Ma se matematicamente è vero che HK · OP = KN · MO , possiamo pensare che: *se consideriamo una leva di fulcro K e bracci HK e KN, il peso MO posto in N è bilanciato dal peso OP posto in H!*

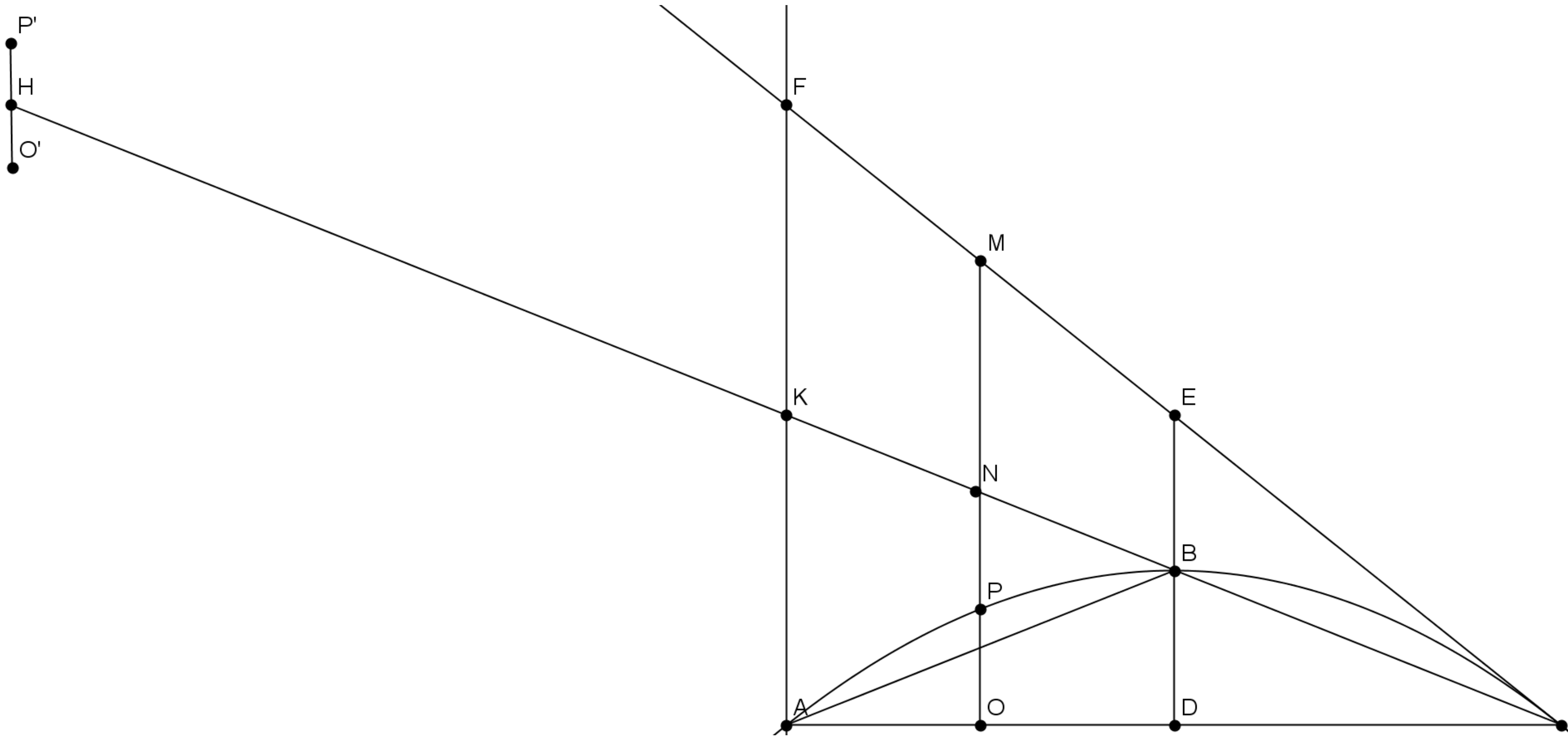


E se questo è vero al variare del punto P sull'arco di parabola, la totalità dei segmenti OP costituisce il segmento parabolico, mentre la totalità dei segmenti MO costituisce il triangolo CAF. Considerando che il baricentro del triangolo CAF si trova nel punto X, tale che KX = 1/3 CK (come ha lui stesso dimostrato),

HK · segm CBA = KX · trian CFA,

cioè, segm CBA = KX/HK trian CFA,

ovvero segmCBA = 1/3 trian CFA.



Successivamente passa a dimostrare che il triangolo CFA ha area doppia del triangolo CKA, che a sua volta è doppio del triangolo CBA. Concludendo:

segm CBA = 4/3 trian CBA.

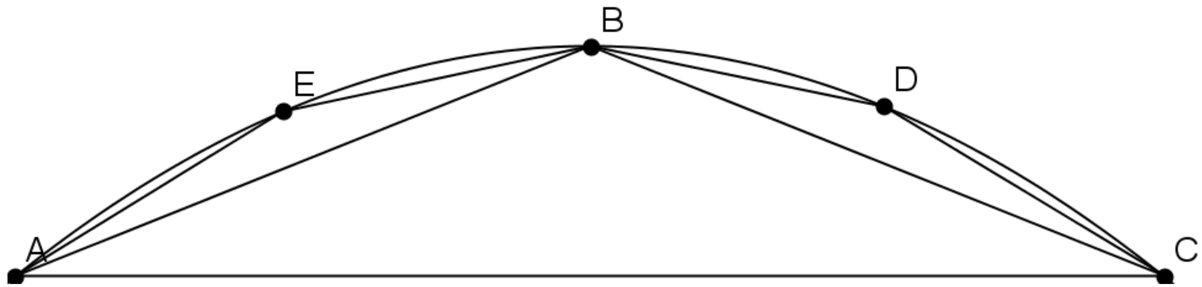
Ora fornisce la dimostrazione rigorosa: considerato il segmento parabolico ABC ed il triangolo ABC, egli colma la differenza tra le aree S e T con triangolini via via più piccoli, considerando cioè le corde AB e BC come basi di ulteriori segmenti parabolici da trattare allo stesso modo e così via.
Dimostra che l'area dei triangolini, a ogni passo è ¼ della precedente, per cui l'area del segmento parabolico è:

$$S = T + 1/4T + 1/16\,T + \ldots.$$

Noi oggi diremmo che le aree costruiscono una progressione geometrica di ragione ¼ , la cui somma è

$$S = 4/3\,T.$$

È interessante osservare che ritiene di poter procedere nella costruzione dei triangolini fino a che la differenza tra S e la somma delle aree dei triangoli sia diventata più piccola di un granello di sabbia, poi di un capello …………..

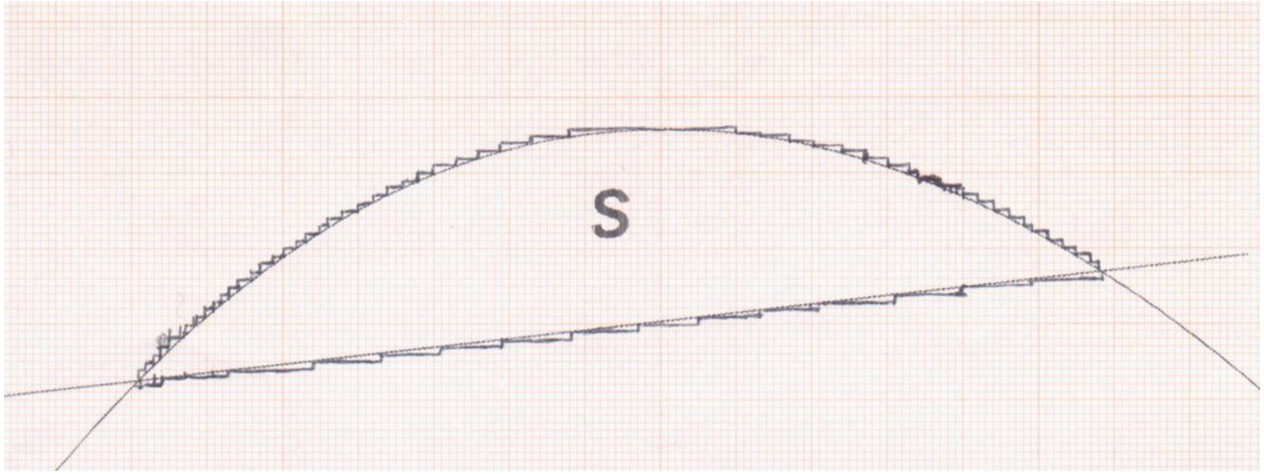


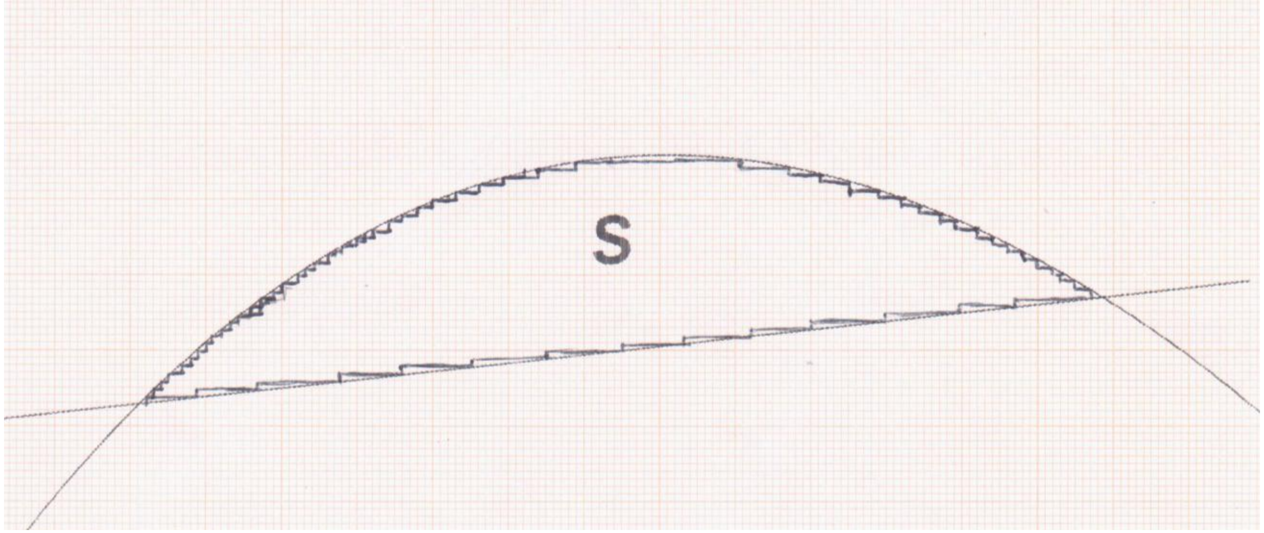
Occorre sottolineare alcuni aspetti molto interessanti:

- per il calcolo dell'area di una figura delimitata in parte da una linea curva Archimede rimanda all'area del triangolo (che è la metà di quella di un rettangolo, che a sua volta è riconducibile ad un quadrato) segue cioè l'idea della "quadratura" tanto cara ai greci;
- scompone l'area del segmento parabolico nella somma di un numero infinito di segmenti, e anche: considera un'area qualunque come esaurita da un numero molto alto di aree di triangoli via via più piccoli anticipando di fatto il calcolo infinitesimale, sviluppato molti secoli dopo da Newton e Leibniz;
- utilizza la fisica per interpretare il rapporto tra aree;
- divide in due momenti la ricerca di una relazione matematica: la scoperta e la dimostrazione vera e propria.

È possibile coglierli per proporli in classe?

Innanzitutto è possibile misurare l’area di un segmento parabolico riportandolo su carta millimetrata. Ne risulterà un plurirettangolo inscritto e uno circoscritto all’area del segmento parabolico, le cui aree approssimano per difetto e per eccesso l’area cercata.


S


S

Modificando "una bilancia molto sensibile", proposta dai Giochi di Anacleto del 2010, abbiamo costruito una bilancia in grado di verificare la relazione esistente tra l'area del segmento parabolico S e quella del triangolo T.

Il materiale occorrente è:

- due bicchieri di plastica;
- una cannuccia;
- 3 spilli.

Uno spillo viene messo trasversalmente alla cannuccia, e gli altri due seguendo la direzione della cannuccia, con l'ago rivolto esternamente alla cannuccia stessa.

Si comincia cercando la posizione dello spillo posto trasversalmente in cui la cannuccia poggiata sui bicchieri è in equilibrio:

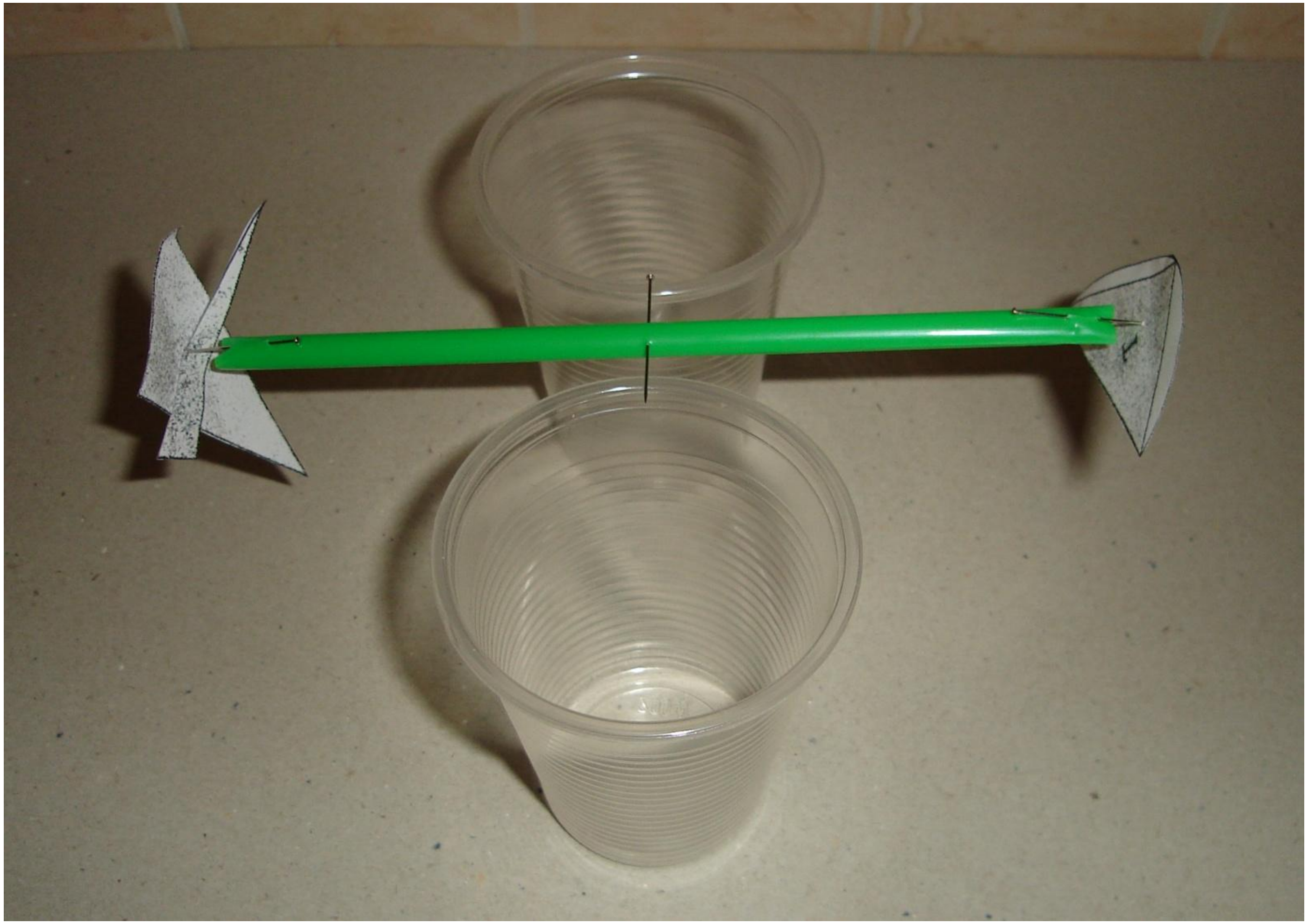
Che succede se agli aghi posti alle estremità della cannuccia mettiamo: da una parte il segmento parabolico S e dall’altra il triangolo T ritagliate da un foglio di carta?

A pensarci bene, era ovvio, perché l'area del segmento parabolico è evidentemente maggiore dell'area del triangolo!!

E se, per riottenere l'equilibrio, provassimo ad aggiungere al triangolo una parte del triangolo stesso?

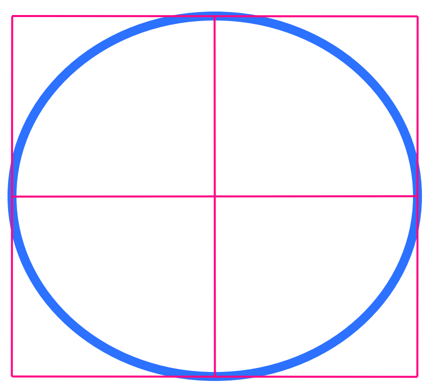
Secondo quanto dice Archimede dovremmo aggiungere 1/3 del triangolo stesso.

Proviamo!



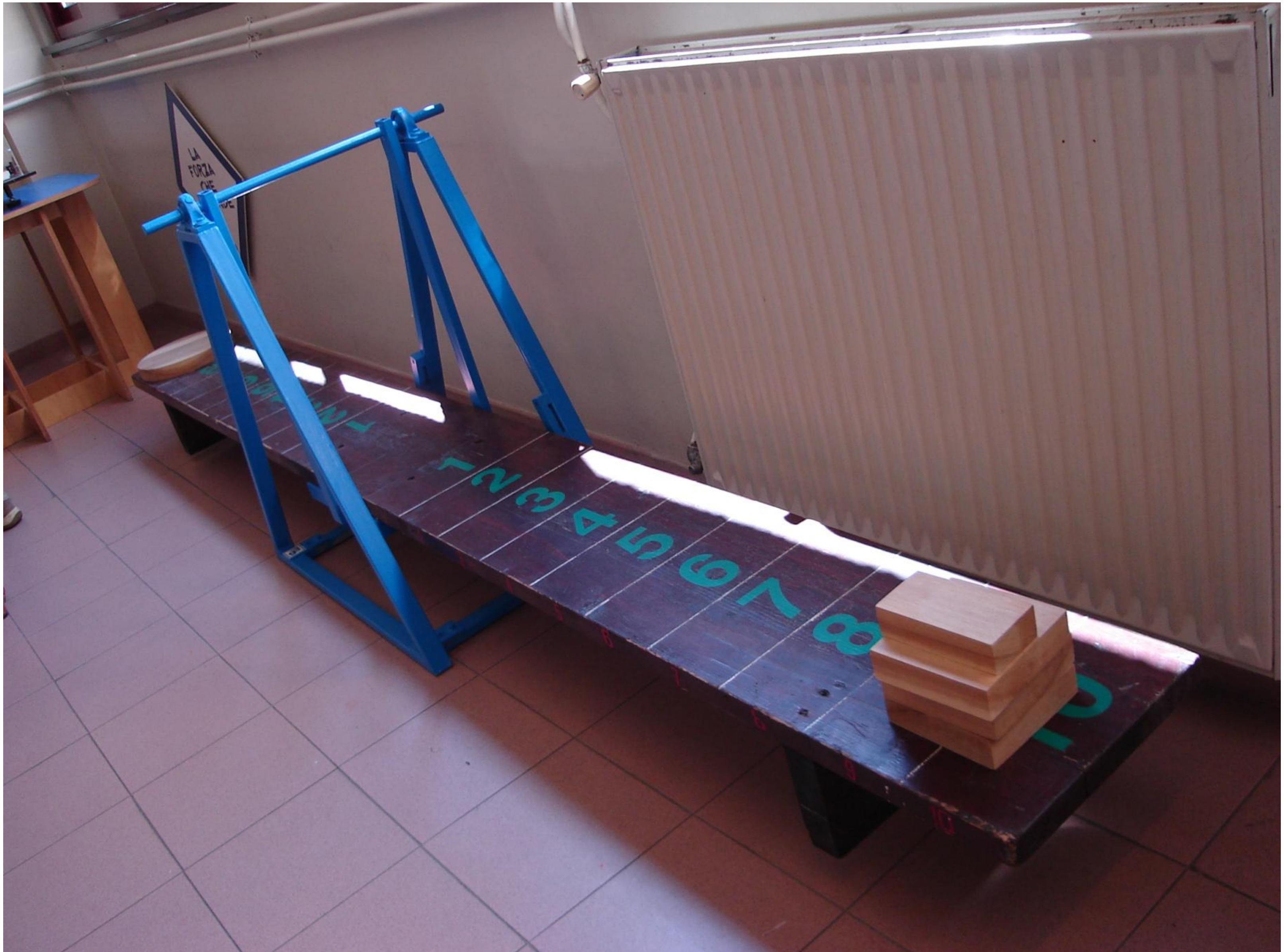
Funziona!!

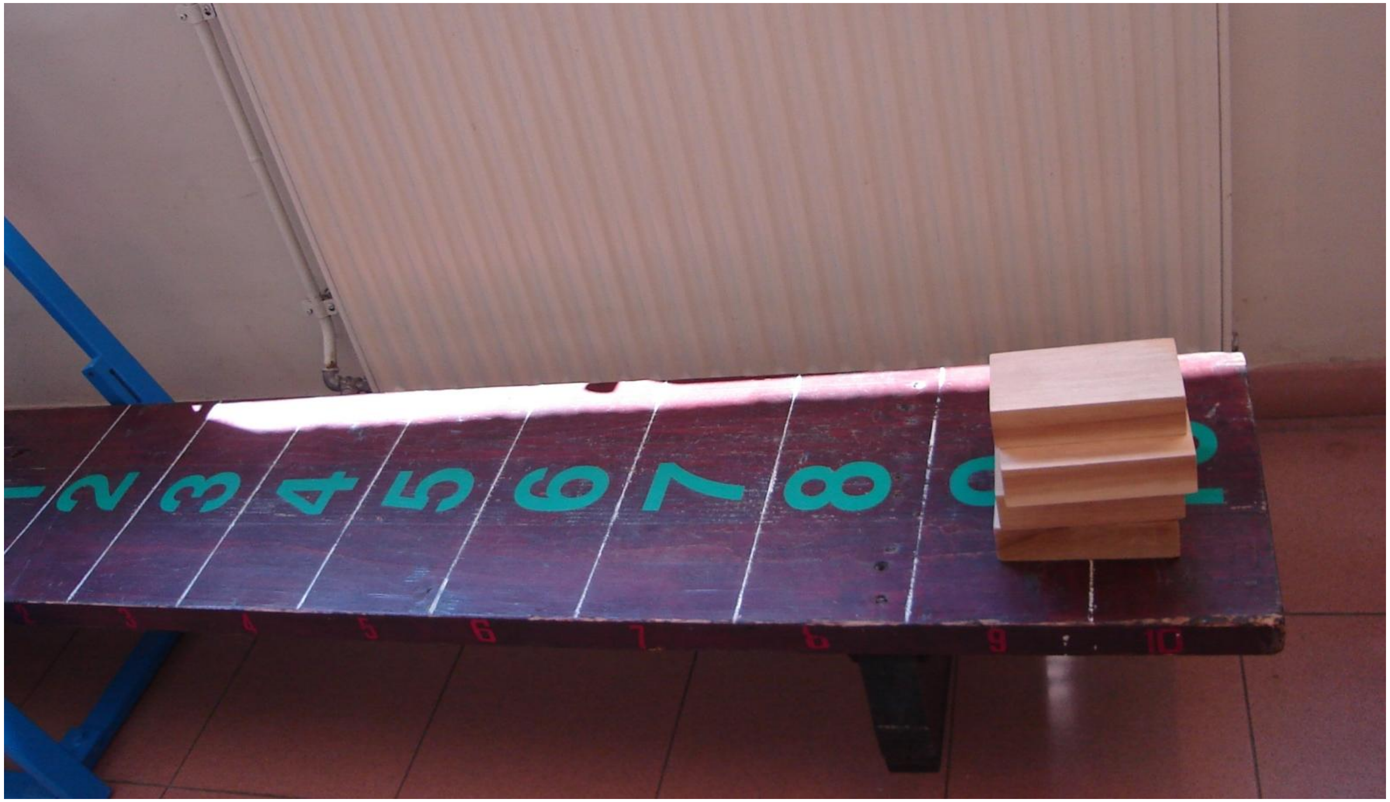
Analogamente si può affrontare uno dei problemi più antichi e più affascinanti: misurare π.
Ovvero, si può confrontare il peso di un cilindro di raggio r con quello dei parallelepipedi di stessa altezza del cilindro e a base quadrata, di lato r:




8 7 6 5 4 3 2 1


8
7
6
5
4
3
2
1


LA
FORZA
CHE

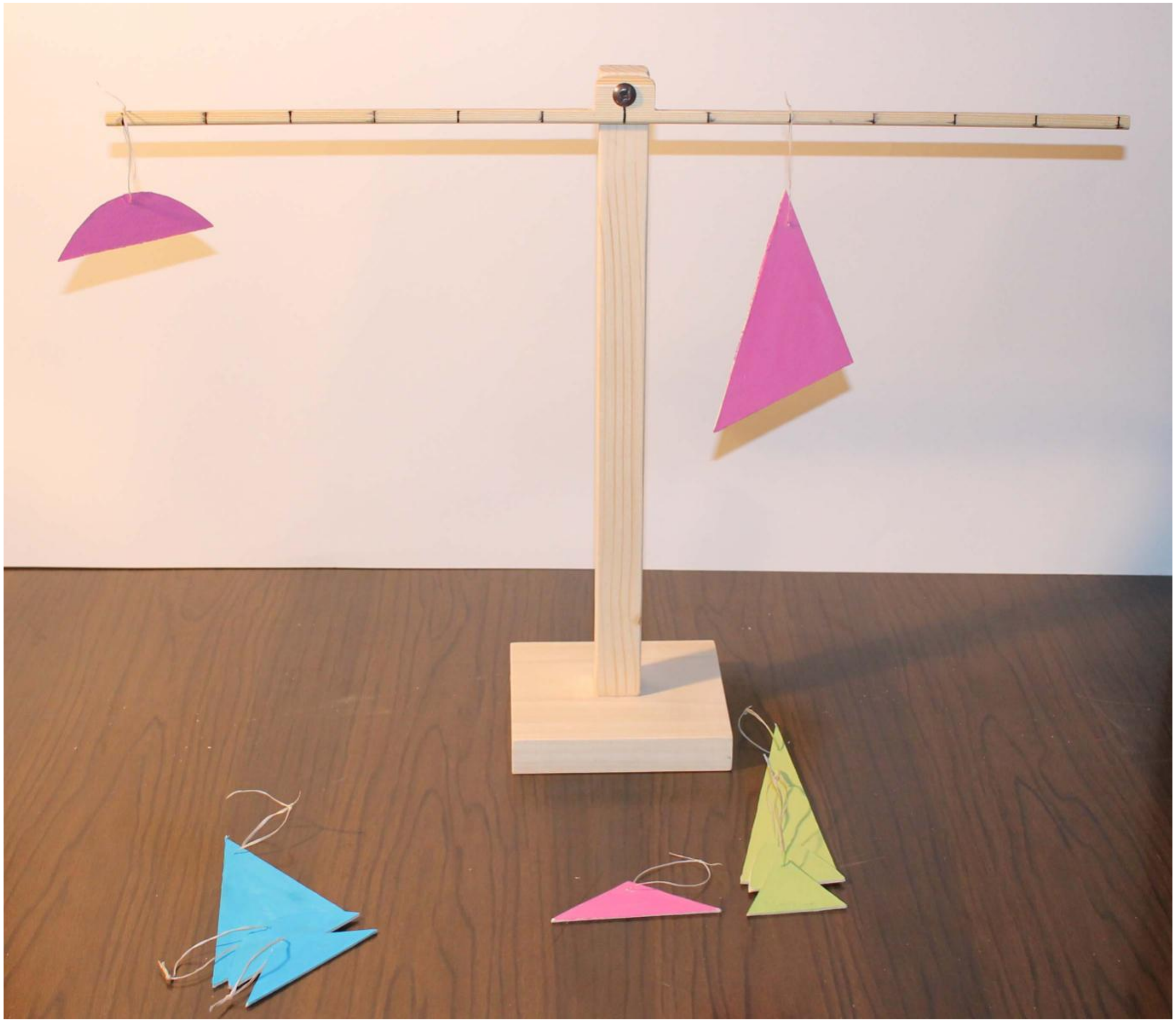


Non bastano 3 parallelepipedi a creare l'equilibrio, ma 4 sono troppi!!

La bilancia che pesa π, ideata dal prof. Mario De Paz, si trova al Centro Idee e Materie in Gioco di Genova.

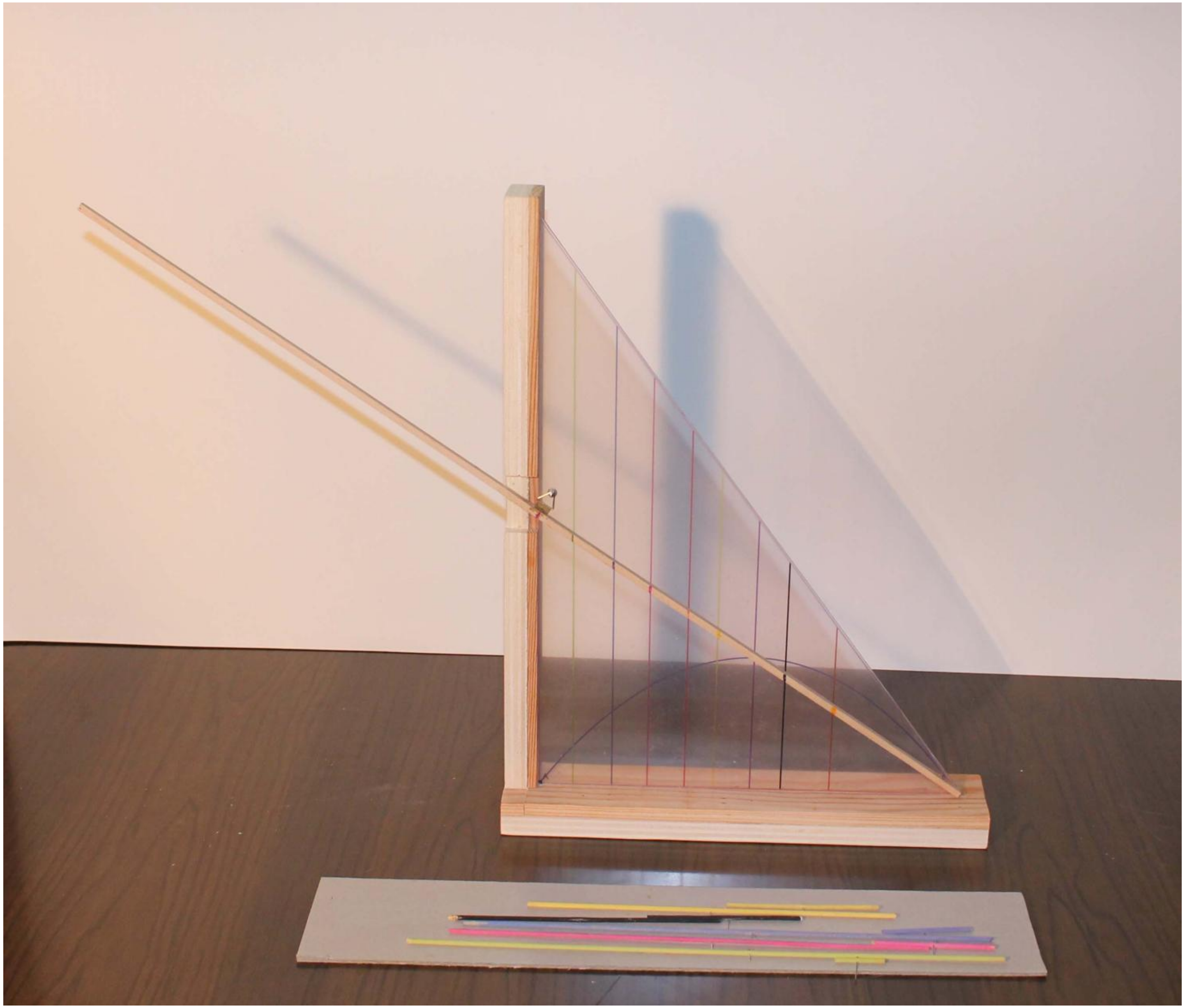
Torniamo alla misura dell'area del segmento parabolico:

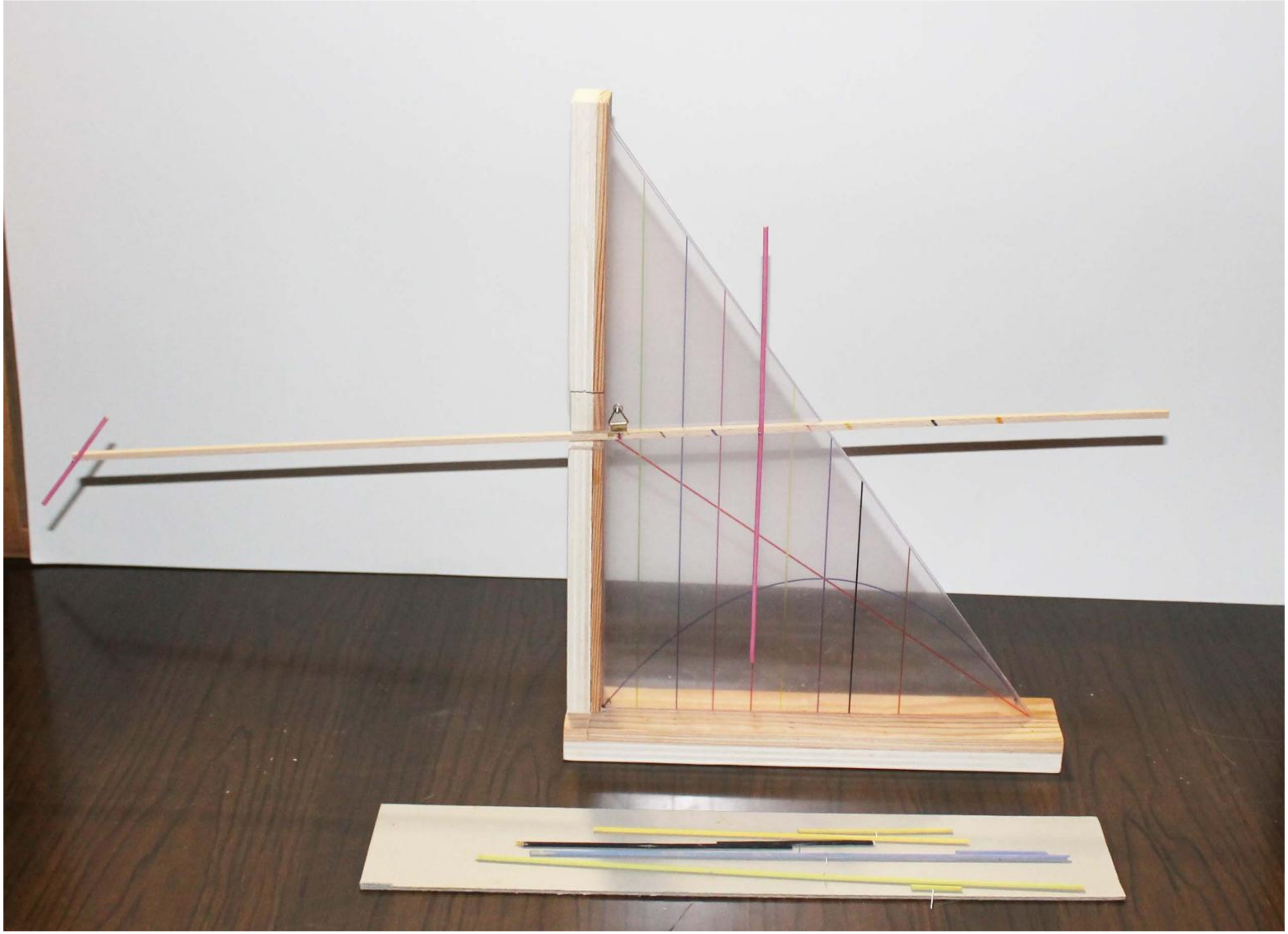
Riportiamo due congegni meccanici che sono stati proposti al Premio Archimede 2013 (indetto dall'Umi in occasione del 2300mo dalla nascita del grande matematico) da una classe seconda dell'Itis "Vittorio Veneto – Città della Vittoria" di Vittorio Veneto (TV), seguita dalla Prof.ssa Clara Della Pietà.



Il triangolo e il segmento parabolico sono di cartoncino che poi è stato colorato. Sono stati ritagliati a partire dalle figure che gli studenti hanno costruito seguendo le indicazioni del docente di Tecnologia e Disegno.

Un altro congegno costituisce una riproduzione fedele dell’idea di Archimede:





La costruzione della parabola e del triangolo (realizzata con Geogebra) è stata stampata su un foglio formato A3 di acetato autoadesivo, incollata ad un rettangolo di plexiglass che poi è stato tagliato seguendo i lati del triangolo. La doppia mediana mobile è stata realizzata con un listello di legno nel quale, a metà, è stato inserito un supporto triangolare per quadri che si aggancia ad un piccolo perno presente nel triangolo. I segmenti sono anch'essi in legno e sono stati realizzati usando degli spiedini e un listello a sezione circolare.

Sulla doppia mediana ci sono dei piccoli fori, in corrispondenza delle intersezioni con i segmenti di sottotangente; i segmenti in legno sono attraversati trasversalmente da uno spillo che sporge di qualche millimetro. La parte sporgente dello spillo viene inserita nel foro.

I due congegni meccanici si sono aggiudicati il quarto posto del concorso.

Dunque nell’opera di Archimede si trovano molti spunti per proposte didattiche.

È solo grazie alle tecnologie più avanzate che gli studiosi sono stati in grado di riportare alla luce il codice C; infatti il palinsesto, oltre ad essere danneggiato dal tempo e dalla muffa, è a prima vista un libro di preghiere. Il rotolo utilizzato nel X secolo per copiare le opere di Archimede è stato sezionato e ridotto in fogli, perciò occorre andare sotto alla superficie, e leggere i caratteri e le immagini celate ortogonalmente al testo che compare in evidenza.

Per superare i limiti dell'occhio umano è stata inviata sui fogli del palinsesto luce a diverse lunghezze d'onda e le immagini ottenute sono state catturate attraverso fotocamere.

Le tante immagini raccolte in un computer, in ordine di lunghezza d'onda, vanno a comporre un data-cube, una matrice tridimensionale di informazioni digitali, che vengono elaborate grazie a una tecnica d'elaborazione di immagini chiamata "analisi multispettrale d'immagini".

Studiando il tipo di luce più adatta, si è scelta quella emessa da LED in quanto è risultata economica, oltre che efficace; ma poi si è passati all'utilizzo di raggi X, per farli interagire col ferro contenuto nell'inchiostro del palinsesto. Infine è stata utilizzata la radiazione di sincrotrone dello SPEAR (Stanford Positron Electron Accelerating Ring), che fa parte del Centro dell'Acceleratore Lineare di Stanford, in California.

Questa è la doppia immagine del foglio 70 e si trova nel sito citato.

È così che si è capito che il codice C, scritto sulla pergamena intorno al 970 d. C., è stato cancellato e sovrascritto dal presbitero Ioannes Myronas che terminò il suo libro di preghiere il 14 aprile 1229, alla vigilia di Pasqua.
Grazie alle tecniche utilizzate è stato possibile leggere parti del codice che Heiberg non era riuscito a leggere.

Tecniche simili sono state utilizzate da un team della Brigham Young University per leggere rotoli di una biblioteca di Ercolano, carbonizzati durante l'eruzione del Vesuvio del 79 d. C..

Sulla figura e l’opera di Archimede si è scritto molto, fino ad imbastire leggende, fra tutte:

• l’esclamazione “Eureka!” che gli viene attribuita in occasione della scoperta della legge del galleggiamento dei corpi (mentre cercava di stabilire la composizione della corona del re Gerone);

• le macchine da guerra costruite per difendere Siracusa dall’assedio dei romani, riportate da Tito Livio, ma forse nate dalla fantasia di quest’ultimo per esaltare la grandezza dell’esercito romano nella conquista della città.

Nella seconda guerra punica Archimede trovò la morte per mano di un soldato romano. Volle che sulla sua tomba fosse incisa una sfera iscritta in un cilindro, infatti proprio inscrivendo la sfera in un cilindro ne aveva trovato il valore della superficie e del volume.

Il Prof. Bruno D’Amore e la Prof.ssa Martha Isabel Fandiño Pinilla, in “La nonna di Pitagora”, fantasticano sulla ricerca del volume della sfera. Essi riferiscono che, mentre Archimede era preso dai suoi studi, la sorella Iliada, alla ricerca della rima per una poesia, gli dice:
“Il volume della sfera qual è? Quattro terzi pi greco erre tre… Non vuol dire nulla ma fa rima, vero?”
“Archimede divenne pallido e quasi svenne”, riferiscono gli autori.

L’immagine qui accanto è tratta dal libro appena citato.

Chissà che non sia stata Iliada a suggerirgli anche il valore dell'area del segmento parabolico …..

Grazie per l’attenzione!

Bibiografia e sitografia:

- Morris Kline : “Storia del pensiero matematico” , Biblioteca Einaudi;
- Reviel Netz, William Noel: “Il codice perduto di Archimede, La storia di un libro ritrovato e dei suoi segreti matematici”, Rizzoli;
- Bruno D’Amore, Martha Isabel Fandiño Pinilla : “La nonna di Pitagora, L’invenzione matematica spiegata agli increduli”, Edizioni Dedalo;
- http://www.archimedespalimpsest.org .