

La storia della matematica entra in classe



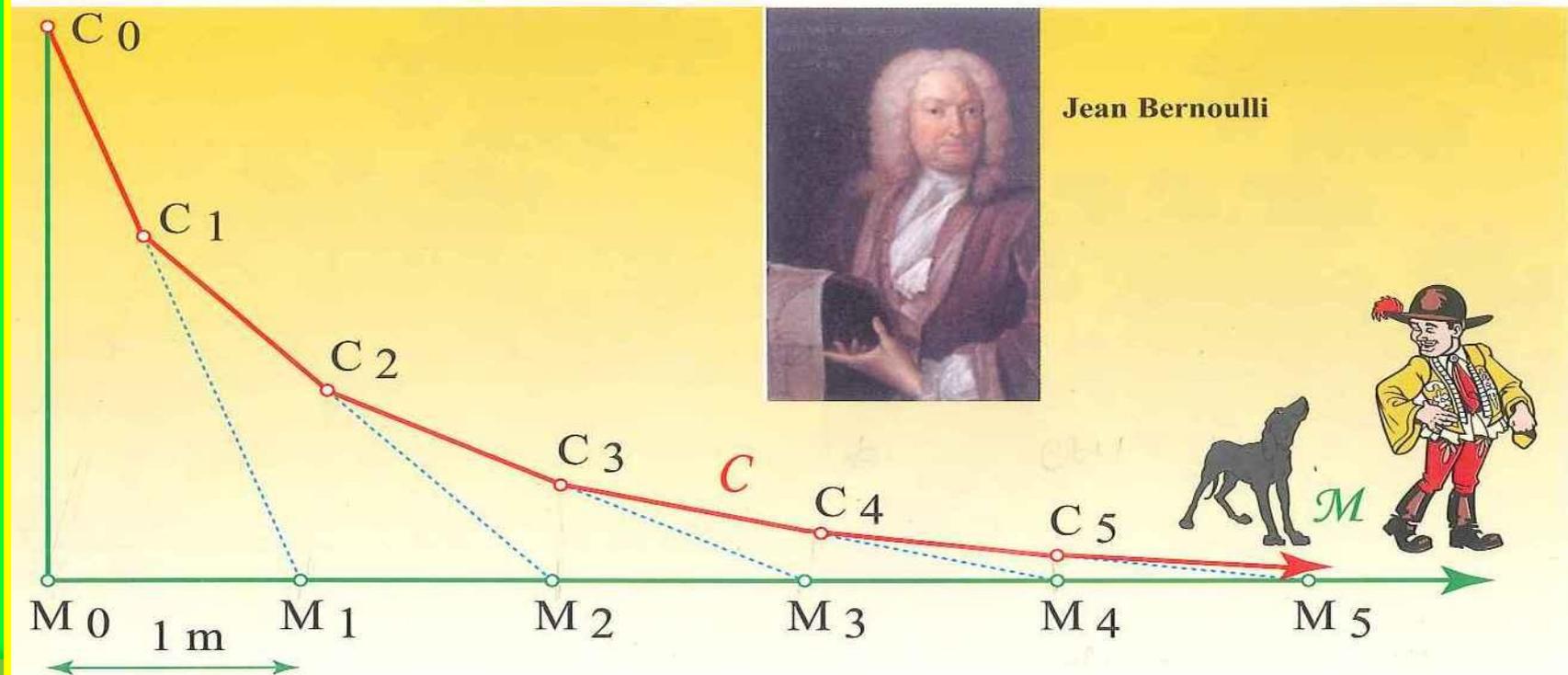
*Congresso
SISM
L'Aquila
Ottobre 2015*

Franca Rossetti- Maria Talamo

Franca Rossetti SISM

La curva del cane di Johann Bernoulli (1)

tra sfide di famiglia e curiose scoperte



Jean Bernoulli

La scelta dell'argomento

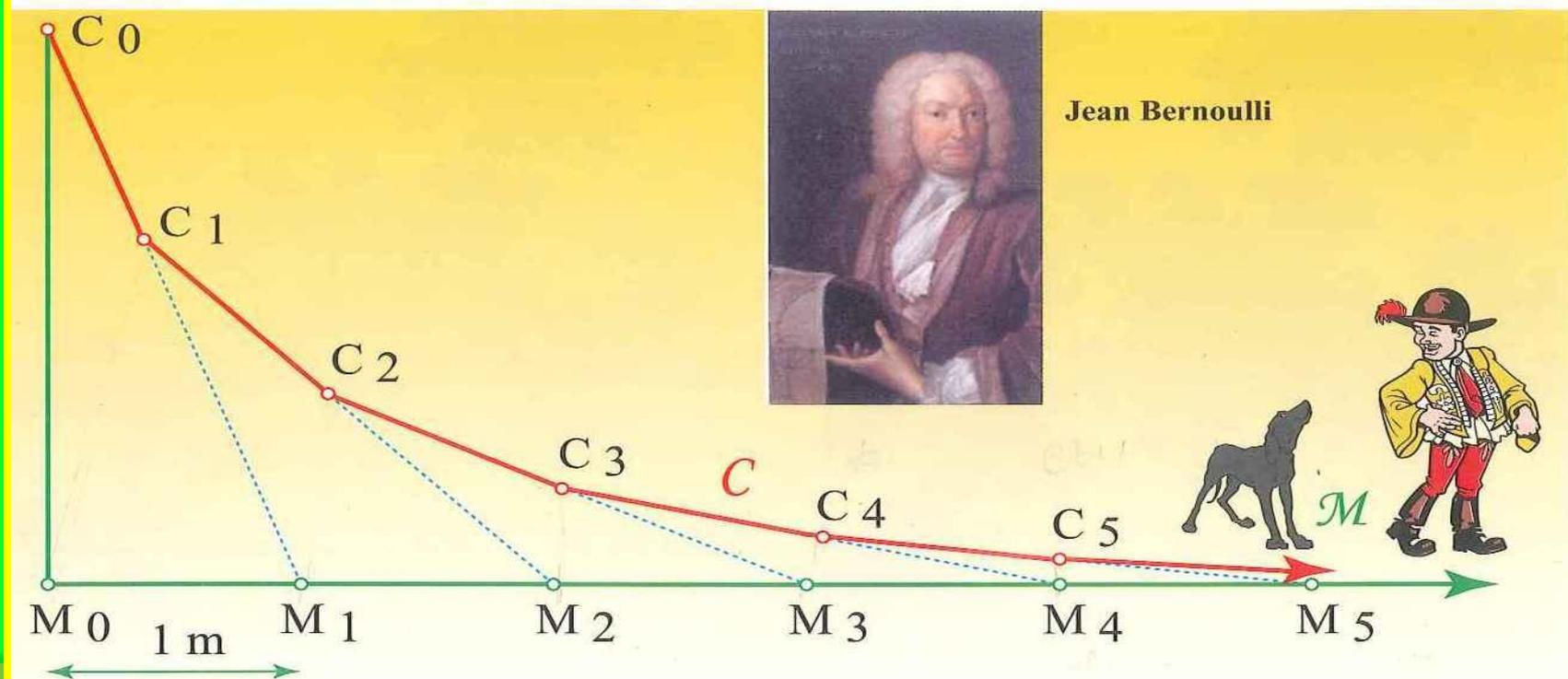
- ◉ *Già sperimentato in una classe quarta all'ITIS "Hensemerger" (MB, in una prima versione con successo*
- ◉ *Come?*
- ◉ *consegnando ai ragazzi la fotocopia di una pagina, sull'argomento, del libro « Addomesticare l'infinito» casualmente presente nella classe.*

Progetto «Ora di Complementi»

- Per integrare efficacemente conoscenze matematiche dopo l'abolizione della disciplina prevista dalla classe di concorso A048*
- Per sottolineare l'aspetto culturale della disciplina presentando gli argomenti in chiave storica*
- Per un'occasione di recupero, rinforzo e approfondimento di conoscenze pregresse o curricolari.*

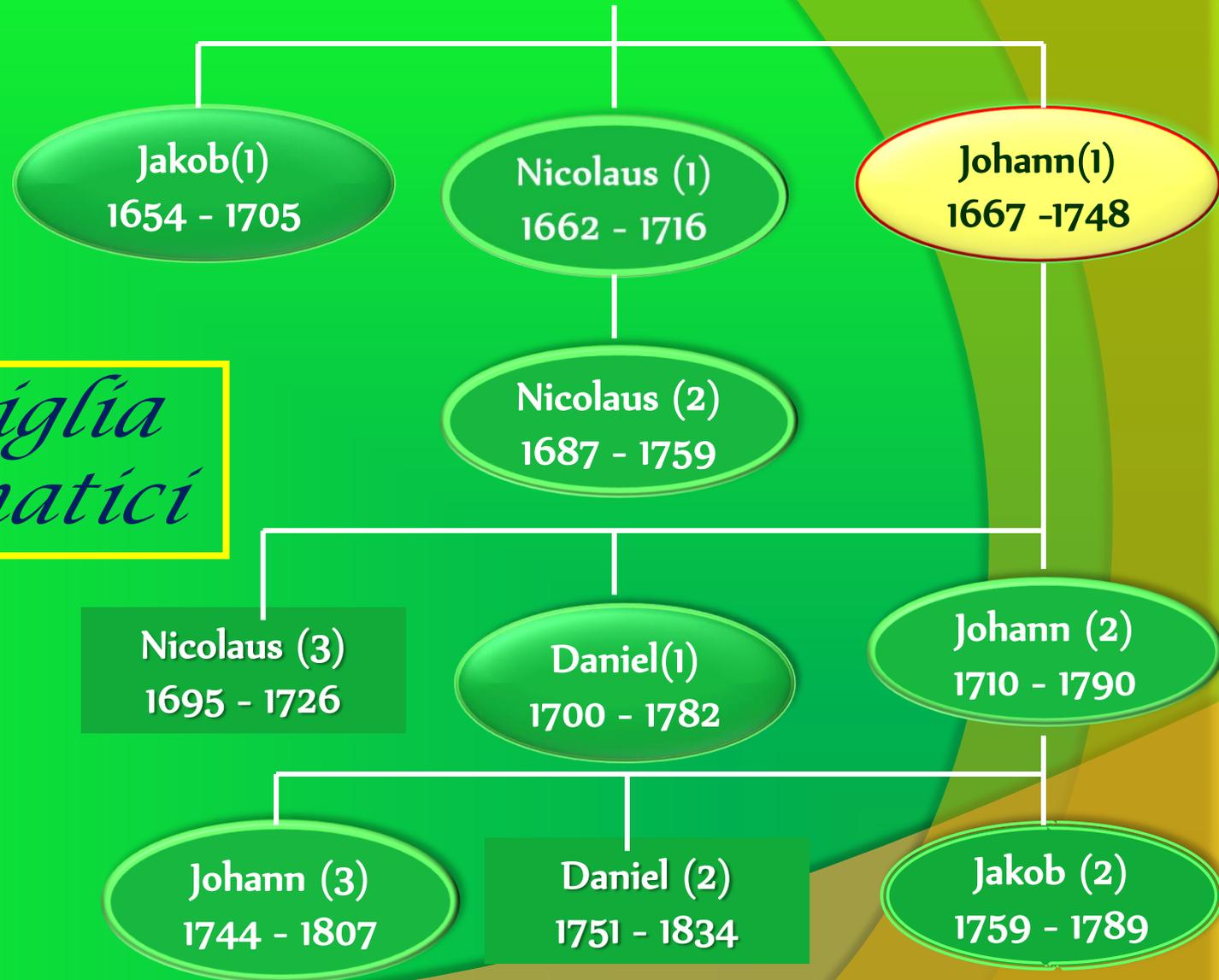
La curva del cane di Johann Bernoulli (1)

tra sfide di famiglia e curiose scoperte



Nicolaus senior

1623 - 1708



*Una famiglia
di matematici*

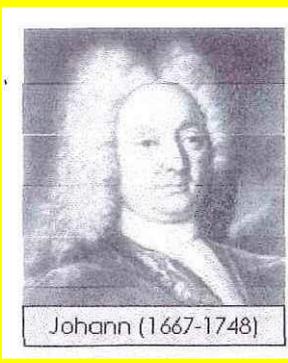
La famiglia Bernoulli

*Di fede protestante, per sottrarsi ai massacri degli ugonotti da parte dei cattolici, nel 1583 il capostipite fuggì da **Anversa** per trasferirsi prima a **Francoforte**, poi in Svizzera stabilendosi a **Basilea**, città libera ed economicamente florida.*

Basilea, la città dei Bernoulli



Johann(1) (1667- 1748)



- ◉ *Fratello di Jakob, da cui aveva appreso la passione per la matematica ,era il decimo figlio di Nicolaus senior.*
- ◉ *Studi : Chimica , dottorato in medicina, ma anche calcolo differenziale*
- ◉ *Negli “Acta Eruditorum” (rivista fondata a Lipsia nel 1682) pubblicò lavori in cui applicò il calcolo infinitesimale a nuovi problemi di analisi e geometria.*

Didattica e Ricerca

- *Nel 1695 fu docente di matematica all'università di Groningen*
- *Eulero fu suo allievo*



I suoi principali contributi

⊙ *Leibniziano*, attaccò l'impostazione analitica di Newton

⊙ *curve esponenziali*

⊙ *prima formulazione della serie di Taylor*

⊙ *introduzione del simbolo $f(x)$*

⊙ *concetto di linea geodetica*

Assieme al fratello Jacob contribuì a diffondere il calcolo infinitesimale in Europa!!!

Sfida in famiglia!

Jakob



- Johann



La brachistocrona

Nel 1696 sulla rivista “Acta Eruditorum”, propose

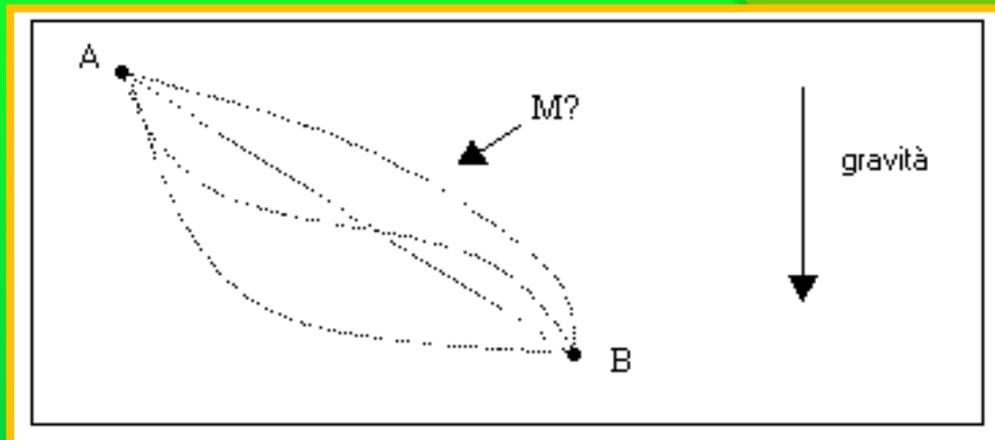
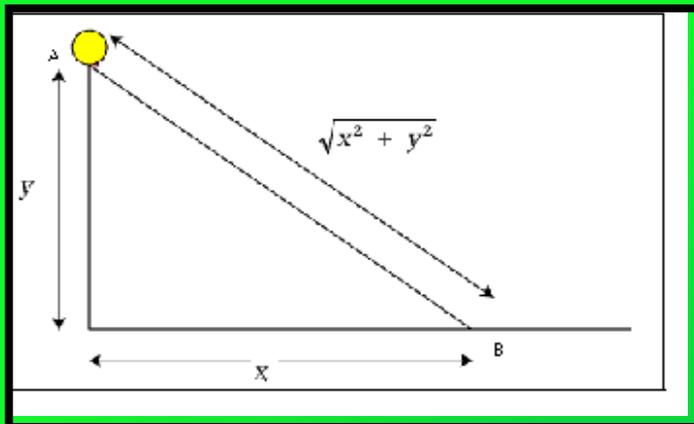
“ il problema della brachistocrona”.

*Si trattava di trovare la curva che deve seguire un corpo pesante M per scendere da un punto A ad un punto B (**non verticalmente**) nel minor tempo possibile, partendo da una posizione di quiete.*

La peculiarità del problema

Fino ad allora con il calcolo differenziale, si riuscivano a trattare questioni in cui la variabile da minimizzare dipendeva solo da uno o più parametri.

*In questo caso invece la quantità da minimizzare, **il tempo**, **dipendeva dall'intera curva descritta** dal punto materiale e proprio questo fatto rendeva inutilizzabili i metodi fino ad allora conosciuti.*



Il problema era già noto a Galileo nel 1630 che lo risolse in modo errato. Ad un primo esame si potrebbe pensare che il cammino più breve sia quello più corto, per esempio una retta

*Se però si tiene conto della pendenza e che la forza di gravità esercita la sua influenza, allora il corpo **M** potrebbe arrivare dal punto **A** al punto **B**, in minor tempo, seguendo una traiettoria non rettilinea. Quale, allora, la curva più adatta?*

Quattro soluzioni

Nel 1697, sulla rivista *Acta Eruditorum* comparvero le soluzioni di

- ◉ *Johann*,
- ◉ di suo fratello *Jakob*,
- ◉ di *Newton*
- ◉ del marchese *de L'Hôpital*

La curva che risolve il problema è nota in letteratura con il nome di *cicloide* e la sua scoperta è attribuita, tra molte polemiche, sia a *Johann* che a suo fratello *Jakob*.

Gossip !

Pare che la dimostrazione di Johann fosse sbagliata al contrario di quella di Jakob al quale si deve, secondo alcuni, la priorità nella scoperta della curva.

Johann in polemica col figlio

Johann, didatta di grande valore, fu elogiato e premiato dall'Accademia di Parigi più volte.

Nel 1735, risultando vincitore ex-quo col figlio Daniel per un lavoro sulle orbite planetarie, si irritò notevolmente per la mancata priorità al punto da cacciare malamente il figlio di casa accusandolo di mancanza di rispetto!

Probabilmente anche avido!

- *Johann fu lo scopritore delle celebri regole di de l'Hopital sul calcolo dei limiti in forma indeterminata: pare, però, che la scoperta sia stata da lui ceduta al marchese Guillaume de l'Hopital in cambio di una somma di denaro Attivo fino agli ultimi giorni della sua vita fu definito da Voltaire:*

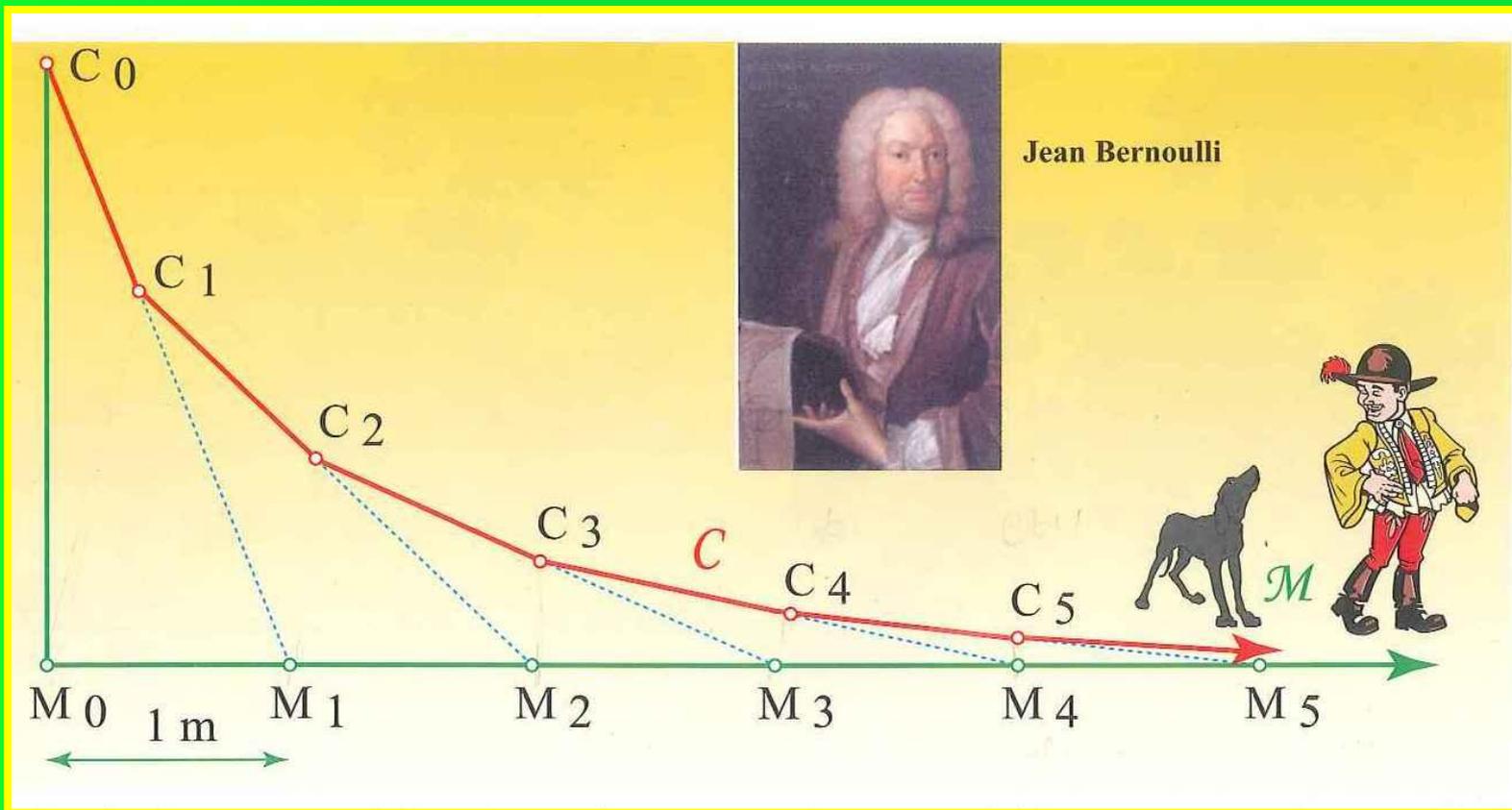
“ Onore della Svizzera e della umanità”

Johann



De l'Hopital

La traiettoria e il calcolo della distanza cane- padrone (problema fatto risalire a Leonardo da Vinci)



Il contesto

- *Si racconta che in un giorno di primavera (non si conosce esattamente la data) Johann (Jean) Bernoulli stesse contemplando, dalla sommità di una piccola duna, lo spettacolo delle onde che si infrangevano su una lunga spiaggia dell'Oceano Atlantico quando fu improvvisamente distratto dall'abbaiare di un cane che correva dietro al suo padrone.*



- ⦿ *Il padrone avanzava con una falcata regolare, sempre alla stessa velocità e nella medesima direzione.*
- ⦿ *Il cane, un po' a sinistra del suo padrone, modificava sempre la sua traiettoria in modo che ciascuno dei suoi passi lo dirigesse verso l'estremità dell'ultimo passo del suo padrone.*
- ⦿ *Poiché il cane correva più veloce del padrone prima o poi l'avrebbe raggiunto*

Nel pensiero di Johann

“la traiettoria del cane sembra molto interessante, voglio studiarne il comportamento in un arco di tempo sufficientemente grande

tenendo conto che la velocità del cane può essere la stessa del padrone, ma anche maggiore o minore di questa ...”

♦

Esperienza in classe : calcolo della distanza cane- padrone

- ◉ *Formulazione di una ipotesi di partenza*
- ◉ *Uso delle coordinate cartesiane e richiami di geometria analitica*
- ◉ *CrITERI di similitudine*
- ◉ *Formalizzazione dei passaggi*
- ◉ *Verifica dei calcoli con excel*
- ◉ *Introduzione al concetto di limite*

$$C_0 \equiv (0, 5)$$

$$C_t \equiv [x(t), y(t)]$$

$$M_0 \equiv (0, 0)$$

$$M_t \equiv (t, 0)$$

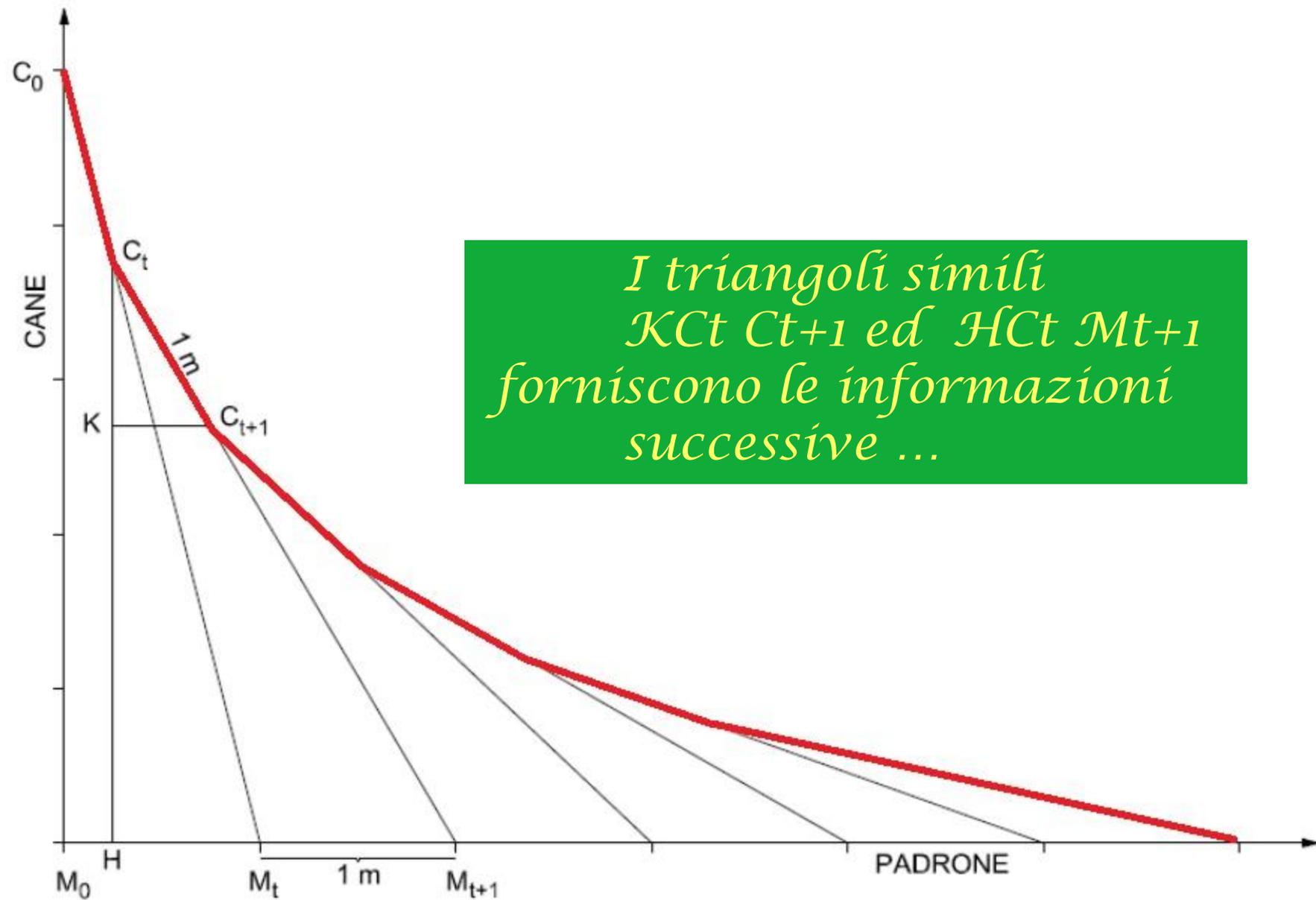
$$C_{t+1} \equiv [x(t+1), y(t+1)]$$

Coordinate essenziali

$$M_{t+1} \equiv (t+1, 0)$$

$$K \equiv [x(t), y(t+1)]$$

$$H \equiv [(x(t), 0)]$$



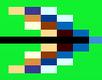
*I triangoli simili
 $K C_t C_{t+1}$ ed $H C_t M_{t+1}$
 forniscono le informazioni
 successive ...*

Considerando la similitudine tra i due triangoli (3 angoli congruenti)

$$C_t K C_{t+1} \quad e \quad C_t H M_{t+1}$$

*È possibile scrivere:
cateto minore sta all'ipotenusa (triangolo grande)
come cateto minore sta all'ipotenusa (triangolo piccolo)*

$$H M_{t+1} : C_t M_{t+1} = K C_{t+1} : C_t C_{t+1}$$

$C_t M_{t+1}$ 

$d(t)$ in termini di distanza

$$[t + 1 - x(t)] : d(t) = [x(t + 1) - x(t)] : 1$$

da cui:

$$[x(t + 1) - x(t)] = \frac{[t + 1 - x(t)]}{d(t)}$$

$$x(t + 1) = x(t) + \frac{[t + 1 - x(t)]}{d(t)}$$



Analogamente col cateto maggiore ...



$$C_t H : C_t M_{t+1} = C_t K : C_t C_{t+1}$$

$$y(t) : d(t) = [y(t) - y(t+1)] : 1$$



$$y(t) - y(t+1) = \frac{y(t)}{d(t)}$$

$$y(t+1) = y(t) - \frac{y(t)}{d(t)}$$

②

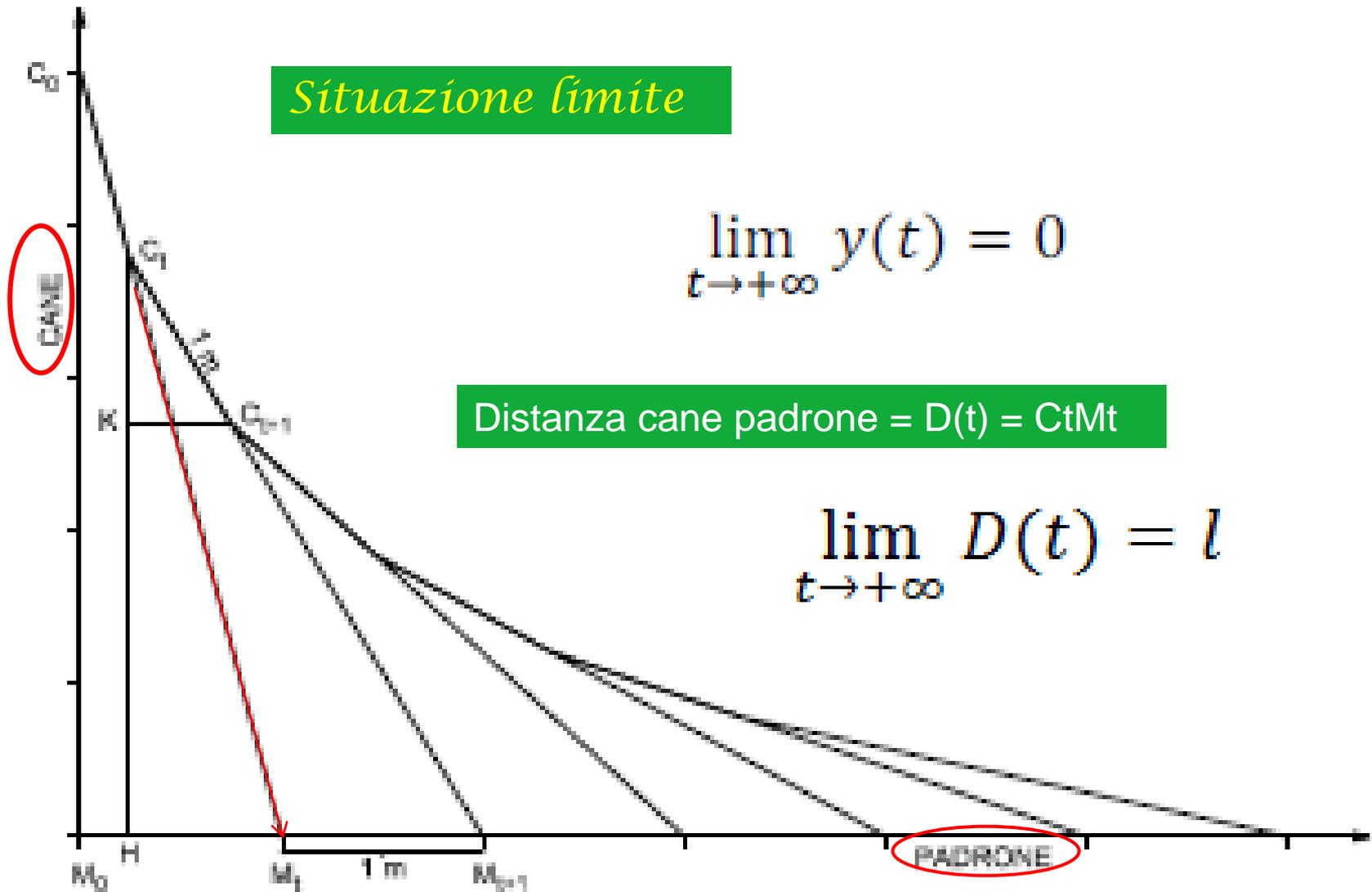
$$d(t) = C_t M_{t+1} = \sqrt{y(t)^2 + [t+1 - x(t)]^2}$$

Situazione limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

Distanza cane padrone = $D(t) = CtMt$

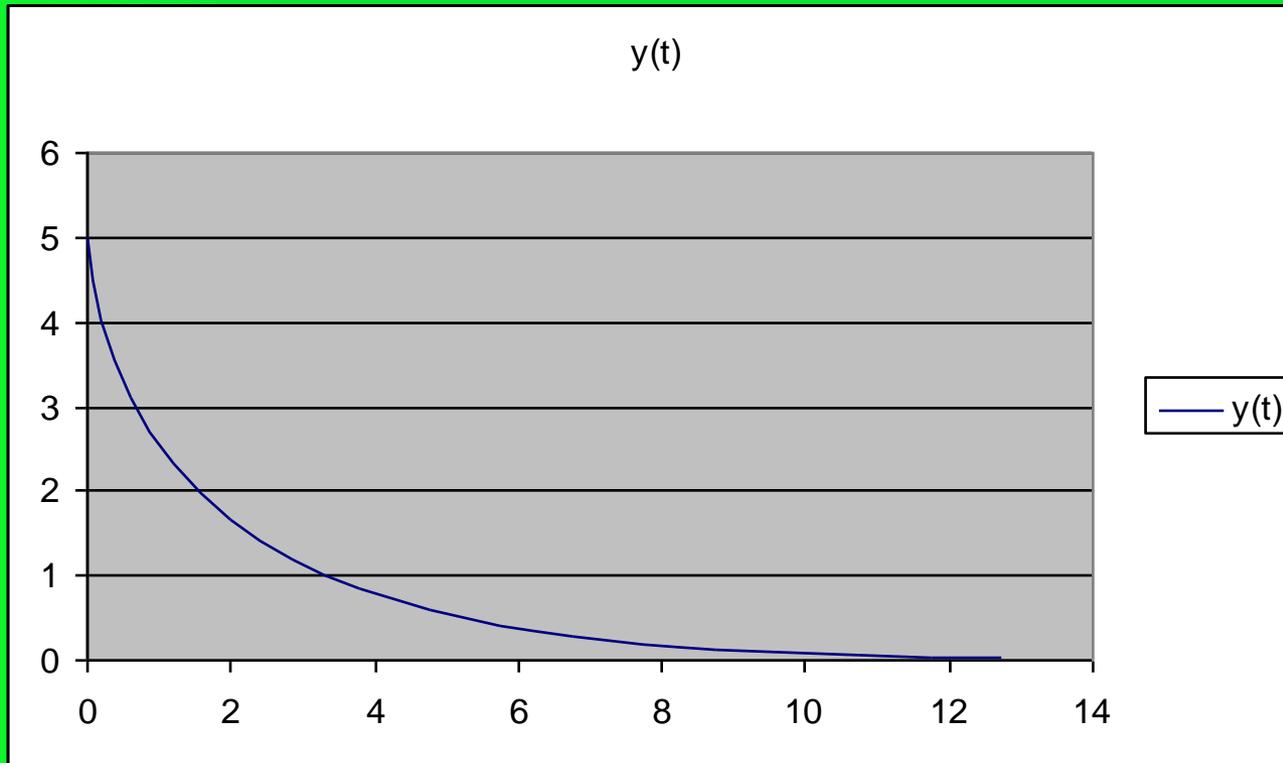
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} D(t) = l$$



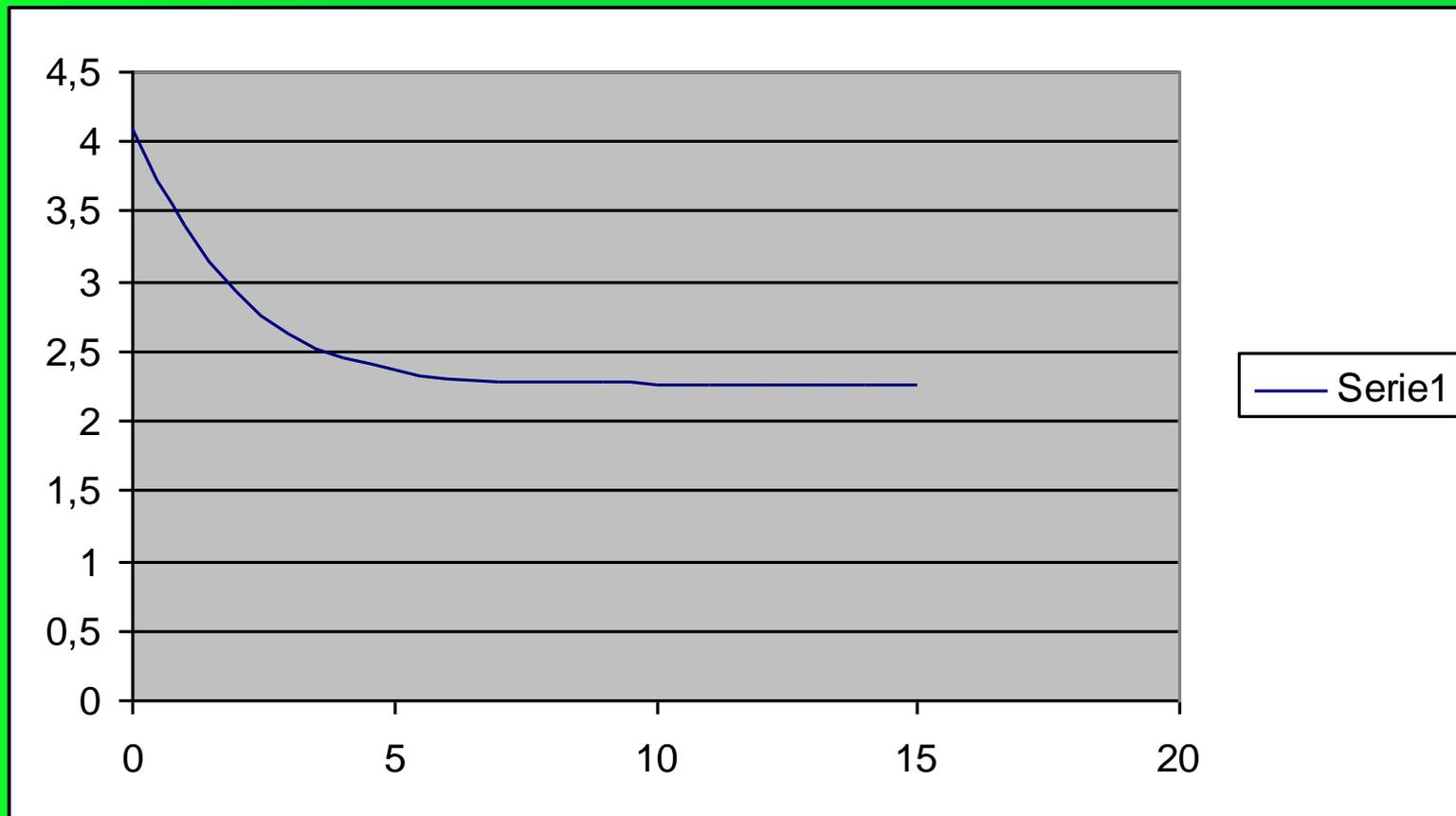
Con le formule (1) e (2)

Step	D(t)	d(t)	X(t)	Y(t)
0	5	5,099	0	5
1	4,099	4,406	0,196	4,019
2	3,406	3,923	0,616	3,107
3	2,621	3,621	1,216	2,315
.....	Nota : D(t) = CtMt viene calcolato con la formula della distanza tra i due punti

Ordinata, posizione del cane in t



$D(t)$, distanza cane- padrone



Considerazioni

- *Lo studio di questa traiettoria non è banale anche se è stata presa in considerazione solo l'ipotesi più semplice cioè l'uguaglianza delle velocità, quella del cane e quella del padrone.*
- *Infatti il problema può essere generalizzato ed applicato a tutte quelle situazioni in cui si è in presenza di un oggetto(corpo) che ne insegue un altro ; ad esempio nel caso dei missili che devono colpire un obiettivo prefissato.*

La risposta della classe VX dell'ITIS "A. VOLTA" di Napoli

- ◉ *Curiosità di conoscere altre pagine di storia della matematica, ritenuta interessante e anche divertente*
- ◉ *Sorpresa per la presenza di curve empiriche accanto a quelle algebriche*
- ◉ *Voglia di approfondire per comprendere meglio la portata del problema*

La risposta della classe VX dell'ITIS "A. VOLTA" di Napoli

- ◉ Qualche difficoltà nell'applicazione del criterio di similitudine con formalizzazione rigorosa*
- ◉ Alcuni alunni hanno commesso errori di calcolo nel corso della verifica sperimentale del limite*
- ◉ Che si trattasse di un limite quasi tutti l'avevano intuito, ma la scoperta di un limite finito li ha spiazzati*

La risposta della classe VX dell'ITIS "A. VOLTA" di Napoli

- ◉ In laboratorio : verificare la veridicità del risultato ricavato manualmente è stato di grande soddisfazione*
- ◉ Proposta di continuare sull'argomento cambiando le ipotesi di partenza o trattando di altre curve a questa collegate*
- ◉ Soddisfazione in generale per una lezione diversa, ma molto coinvolgente*

Una parentesi didattica

*Esiti di apprendimento :
da Indicazioni nazionali del 2007
ai fini del raggiungimento dei traguardi
per lo sviluppo delle competenze*

- *usare la visualizzazione, il ragionamento spaziale e la modellizzazione geometrica per risolvere problemi del mondo reale o interni alla matematica*
- *produrre congetture, testare, validare le congetture prodotte*

*Dopo Johann Bernoulli la curva del cane
fece tendenza, con tutte le sue varianti*

*Le curve di
inseguimento e di
trascinamento*

Prossima esperienza in classe : dalle curve empiriche alle superficie

- ◉ *Richiamo al concetto di funzione anche con riferimento alla Fisica*
- ◉ *Grafico di una funzione con riferimento ai concetti di asintoto, tangente e cuspidi*
- ◉ *Logaritmi naturali e in base dieci*
- ◉ *La spirale logaritmica e i numeri di Fibonacci*
- ◉ *Trigonometria : seno e coseno*
- ◉ *Dalla geometria euclidea a quella iperbolica*

Bibliografia

- ◉ *Mondo matematico, Curve pericolose, RBA Italia 2011*
- ◉ *Addomesticare l'infinito, A. Deledicq- F. Casiro, edizioni Kangourou Italia 1997*
- ◉ *Le curve matematiche tra curiosità e divertimento, Luciano Cresci, Hoepli 2009*

rossetti.franca@fastwebnet.it

cromace@libero.it

maria.talamo8@libero.it