Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica

La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori

CONVEGNO NAZIONALE 10 - 11 - 12 Marzo 2011
Montevarchi - San Giovanni Valdarno - Terranuova Bracciolini - Figline Valdarno

Numeri e tecniche di calcolo nelle civiltà extraeuropee

Livia Giacardi
11 marzo 2011

Il piacere di insegnare - Il piacere di imparare la matematica

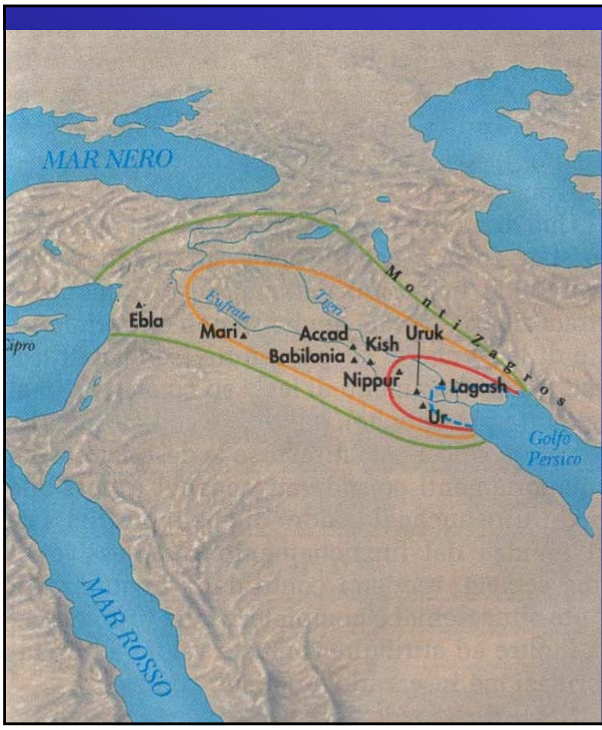
La storia della matematica in classe: dalle materne alle superiori

CONVEGNO NAZIONALE 10 - 11 - 12 Marzo 2011
Montevarchi - San Giovanni Valdarno - Terranuova Bracciolini - Figline Valdarno

Numeri e tecniche di calcolo nella *Terra fra i due fiumi*

Numeri e tecniche di calcolo nella Cina antica

Numeri e tecniche di calcolo nella *Terra* *fra i due fiumi*



La terra fra i due fiumi

- - - -

Linea di costa nel III millennio

Area di influenza delle prime città stato sumere (IV-III millennio a. C.)

Area di influenza degli Accadi all'epoca di Sargon I (2350 a. C.)

Confini del regno di Hammurabi (1792-1750 a. C.)

Tavola cronologica

	STORIA GENERALE	STORIA DELLA CIVILTÀ	STORIA DELLA SCIENZA
−3000	Città Stato sumere	Scrittura cuneiforme Alto livello culturale	Sistema sessagesimale
−2800-1800	Semitificazione		Tavole di divisione e moltiplicazione
−1700	I dinastia Babilonese Hammurabi	Fioritura culturale Legislazione, amministrazione della giustizia.	Grande sviluppo dell'algebra e della geometria Osservazioni di Venere
−1500-1250	Babilonia sotto il dominio dei Cassiti	Raccolta di pronostici: *Enuma Anu Enlil*	Primi calcoli astronomici, osservazioni del sorgere eliaco delle stelle fisse.
−747	Nabonassar re di Babilonia		Osservazioni delle eclissi in Babilonia
−722	Sargon II	Palazzi reali Assiri Astrologi di corte	Compendi astronomici I-NAM-GIS-HAR e MUL-APIN di origine babilonese, ma copiati in Assiria verso il 700
−650	Assurbanipal	Biblioteca di Assurbanipal	
−612 −604	Distruzione di Niniveh Fine dell'impero Assiro Nuovo impero babilonese dei Caldei. Nabucodonosor	Nuovo periodo di fioritura delle arti e delle scienze	Osservazioni della luna e dei pianeti.
−540 −500	Ciro fonda l'impero persiano Dario		Maggiore accuratezza di osservazioni dello Zodiaco Periodi dei pianeti
−333 −311	Alessandro Magno Inizio dell'era Seleucide	Ellenismo Nascita degli oroscopi	Fioritura dell'astronomia. Tavole della luna e dei pianeti. Revival dell'algebra.

Fonti per la matematica mesopotamica

circa 300 tavolette di argilla scritte in caratteri cuneiformi risalenti a tre periodi:

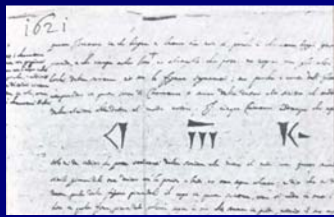
3000-2100 a.C.
Epoca paleobabilonese 1800-1595 a. C.
Epoca Seleucide (304-141 a. C.)

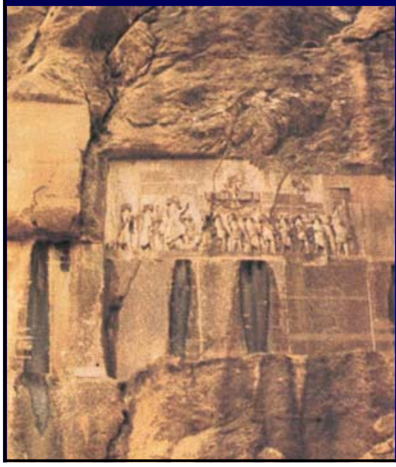
Tavole di calcolo:
- Tavole di moltiplicazione, tavole di inversi, elenchi di misure con passaggi da un'unità di ordine inferiore a una di ordine superiore e viceversa, tavole di potenze, tavole di radici quadrate,ecc.

Elenchi di problemi:
- con o senza soluzione
- *ricette di calcolo*
- niente simbolismo
- nessuna dimostrazione

G.F. Grotefend
H.C. Rawlinson
J. Oppert,
F. Thureau-Dangin
contribuirono alla decifrazione della la scrittura cuneiforme (1802-1905)

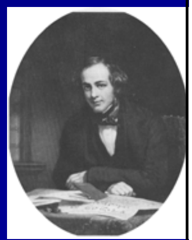
Lettera di Pietro della Valle (1621), uno dei primi esempi di caratteri cuneiformi pervenuti in Europa.





Roccia di Behistun con iscrizione trilingue

I contributi decisivi allo studio delle tavolette matematiche risalgono però solo agli anni **1930-1960.**
Neugebauer, Thureau-Dangin, Bruins



H.C. Rawlinson

Caratteri delle matematiche mesopotamiche

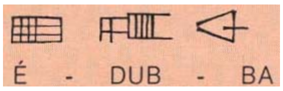
La matematica **non è intesa come un'attività speculativa astratta**, ma un prodotto sociale generato dai bisogni di una società in continua espansione. Nasce e si sviluppa nei templi come **strumento per l'amministrazione della città** (costruzione di edifici e canali, computo dei giorni necessari per condurre a termine un lavoro, divisione di eredità, calcolo di interessi, riscossione di imposte, …)

I problemi hanno perlopiù una veste concreta e sono classificati a seconda del tipo di soluzione
- funzione didattica dei testi
- certa consapevolezza della generalità, anche se non c'è alcuna esigenza dimostrativa.

➡ **sistema di numerazione sessagesimale posizionale**

➡ **"calcolo algebrico":** soluzione di problemi riconducibili a equazioni di 1° e 2° grado, particolari equazioni di grado superiore al 2°, particolari sistemi

Scribi, VIII sec. a.C.



La casa delle tavolette = la scuola

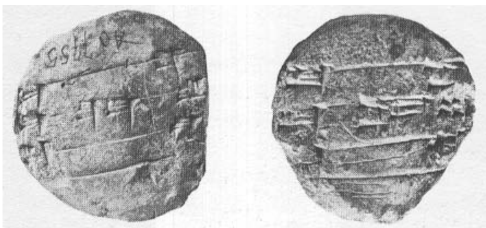
Gli **scribi** costituivano una categoria di specialisti di alto livello con competenze linguistiche, matematiche e metrologiche
Erano potenti funzionari dello stato con varie specializzazioni.
È documentata l'esistenza di **scribi donne**

Scuole paleobabilonesi (1900-1500 a.C.): Nippur, Uruk, Ur, Mari, Ebla

Materie di studio: lingua, grammatica e letteratura sumerica, matematiche, legislazione, musica
Metodo: copiare liste di parole (alberi, animali, oggetti, località, divinità, stelle,…), copiare vocabolari bilingui sumero-accadico, risolvere problemi basandosi su quelli risolti dal maestro [Sjöberg 1976]

"**Ricopiare testi modello costituiva una parte essenziale del programma di studi delle scuole paleobabilonesi** (1900-1500 a.C.). Molti testi contenevano elenchi e tabelle ... Eseguendo questi compiti di ricopiatura, **lo studente si esercitava nella scrittura cuneiforme e al tempo stesso accumulava una piccola biblioteca personale di tavolette**" [Friberg 1984]

Le tavolette scolastiche erano ovali: su un lato c'era lo scritto del maestro e dall'altro il "compito" dello studente



L’origine dei segni numerici e le “bullae” di argilla con gettoni

Bulla con gettoni, Susa, ca 3300 a.C., Louvre

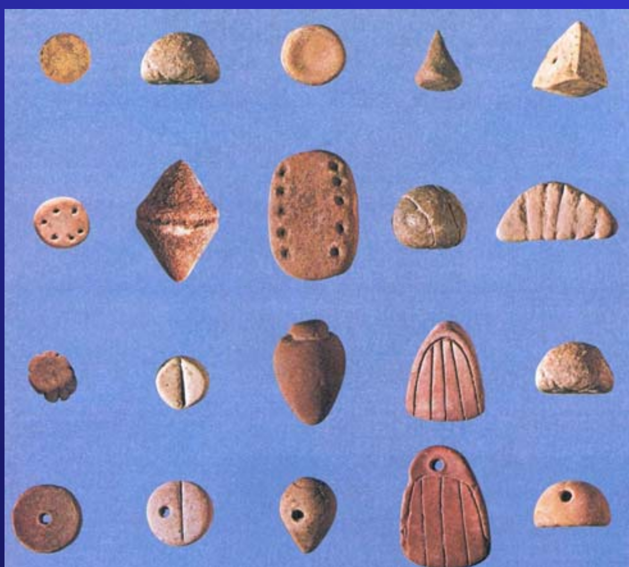
Le bullae molto probabilmente servivano nelle transazioni commerciali. I gettoni contenuti descrivevano la merce inviata. Rompendo la bulla l’acquirente poteva verificare se la merce corrispondeva.

Bassa Mesopotamia, 3100 a. C.

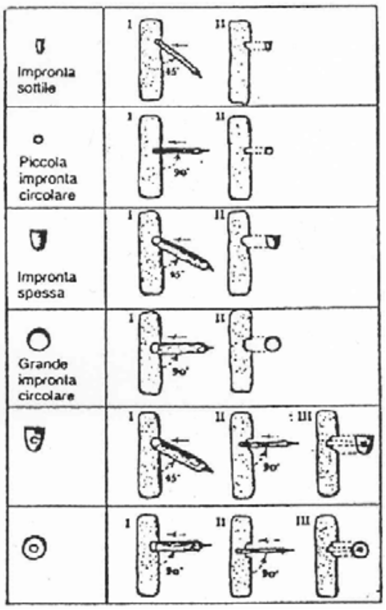
1 10 60 600 3600 36000

Successivamente si iniziò ad imprimere sulla superficie della bulla i vari gettoni. Passaggio dai gettoni ai simboli numerici

Alcuni tipi di gettoni



Sistema di numerazione sumerico (3000 a. C.)

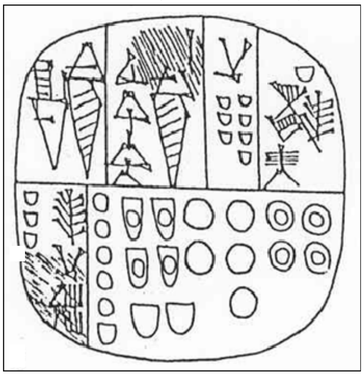


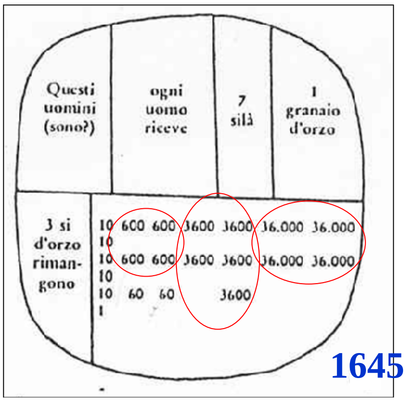
Sistema di numerazione **additivo, sessagesimale misto**, basato sull'uso congiunto della base 60 e 10

gĕs	1	→ uomo
u	10	
gĕs (ta)	60	
geš-u	600 (= 60 × 10)	
sar	3600 (= 60^2)	
šar-u	36000 (= 60^2 × 10)	

Esisteva anche il termine **šar-gal (= grande šar)** per indicare 216000 (60^3), ma non il simbolo

La più antica divisione (2650 a. C.)





164571

Il problema è il seguente:

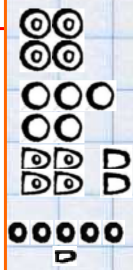
Il contenuto di un granaio d'orzo (32×36000 *silà*) è distribuito fra gli operai. Ciascuno riceve 7 *silà* e ne rimangono 3. Quanti sono gli operai?

32 × 36000 : 7

Come ha trovato la soluzione lo scriba?

Probabilmente con una serie di divisioni successive con opportune conversioni da un'unità a quella immediatamente inferiore. **[Guitel 1963]**

32×36000	7
	4×36000
resto 4×36000 *pari a* 40×3600	5×3600
resto 5×3600 *pari a* 30×600	4×600
resto 2×600 *pari a* 20×60	2×60
resto 6×60 *pari a* 36×10	5×10
resto 1×10 *pari a* 10×1	1
resto 3	



144000

18000

2400+120

50+1

La risposta è 164571

Sistema di numerazione sessagesimale posizionale babilonese

Fa la sua comparsa nell'ambiente colto all'inizio del II millennio a.C. come strumento per la matematica e per l'astronomia.

segno unità $\ldots\ 60^3, 60^2, 60, 1, \frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3} \ldots$

segno per la decina

I numeri da 1 a 59 sono scritti in modo additivo con la base ausiliaria 10, per i numeri superiori a 60 è utilizzato il principio di posizione (il valore del simbolo dipende dal posto che occupa)

Nel nostro sistema di numerazione decimale

$$4818 = 4 \times 1000 + 8 \times 100 + 1 \times 10 + 8 =$$
$$= \boxed{4} \times 10^3 + \boxed{8} \times 10^2 + \boxed{1} \times 10^1 + \boxed{8}$$

Nel sistema di numerazione sessagesimale posizionale

1 , 20 , 18 ; 0

$$4818 = 3600 + 1200 + 18 = \boxed{1} \times 60^2 + \boxed{20} \times 60 + \boxed{18}$$

1 , 20 , 18 ; 0

4818	60	
4800	80	60
18	60	**1**
	20	

31250	60	
31200	520	60
	480	**8**
50	**40**	

8 , 40 , 50 ; 0

8×60^2 + 40 $\times$60 + 50 = 28.800 + 2.400 + 50 = 31.250

Testo V di Susa

$10 \times 60 + 15 = 615$

$10 \times 60^2 + 10 \times 60 + 5$

$10 \times 60^3 + 10 \times 60 + 5$

25

$20 + \frac{5}{60}$, ...

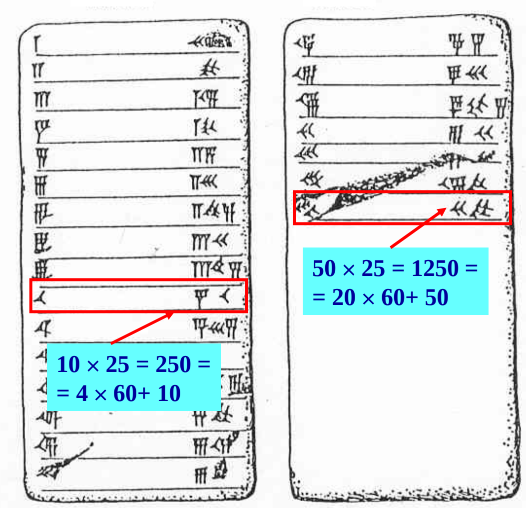
Ci troviamo davanti a due tipi di ambiguità:

-una derivante dalla mancanza dello zero sia in posizione finale sia in posizione mediale

- l'altra derivante dalla difficoltà di sapere come devono essere raggruppati i segni

"Lo zero è la cifra più importante.
È un colpo di genio fare di un nulla qualcosa,
attribuendogli un nome e creando un simbolo per esso"
[Van der Waerden 1954]

Fronte | Retro



	TRASCRIZIONE		TRADUZIONE (sistema posizionale decimale)	
FACCIA	1	25	1	25
	2	50	2	50
	3	1;15	3	75
	4	1;40	4	100
	5	2;05	5	125
	6	2;30	6	150
	7	2;55	7	175
	8	3;20	8	200
	9	3;45	9	225
	10	4;10	10	250
	11	4;35	11	275
	12	5;	12	300
	13	5;25	13	325
	14	5;50	14	350
	15	6;15	15	375
	16	6;40	16	400
RETRO	17	7;05	17	425
	18	7;30	18	450
	19	7,45 ★	19	465 ★
	20	8;20	20	500
	30	12;30	30	750
	40	16;40	40	1 000
	50	20;50	50	1 250

★ Errore commesso dallo scriba

Tavola di moltiplicazione
per 25 (ca 1600 a.C.) [TMS, 35]

La tavola di moltiplicazione di un sistema di numerazione in base *n* ha *(n-1)*^{2} prodotti

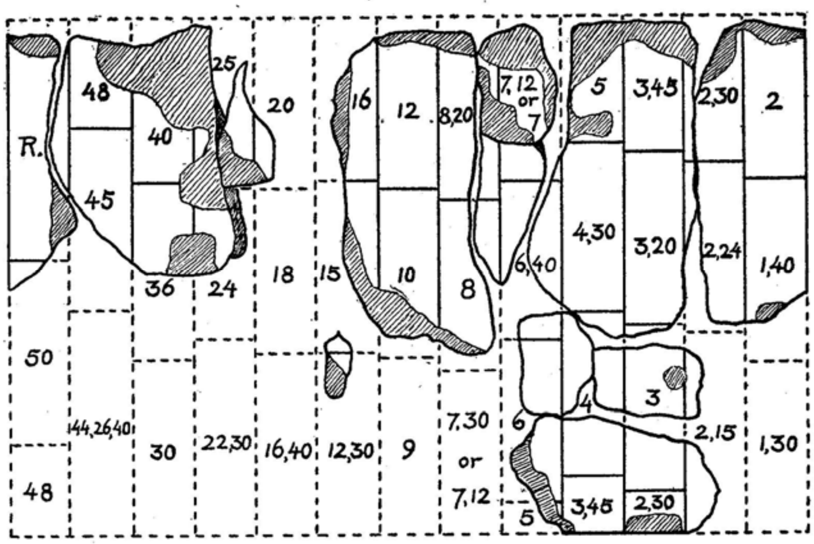
1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La tavola di moltiplicazione del sistema in base **60** comporta **59×59 = 3481** prodotti.

In realtà i matematici Babilonesi non costruirono sistematicamente questa tavola, ma costruirono tavole parziali che combinate insieme consentivano di eseguire qualunque moltiplicazione

Cilindro A 7897 [MCT, 24-25]

tavole di moltiplicazioni "combinate"



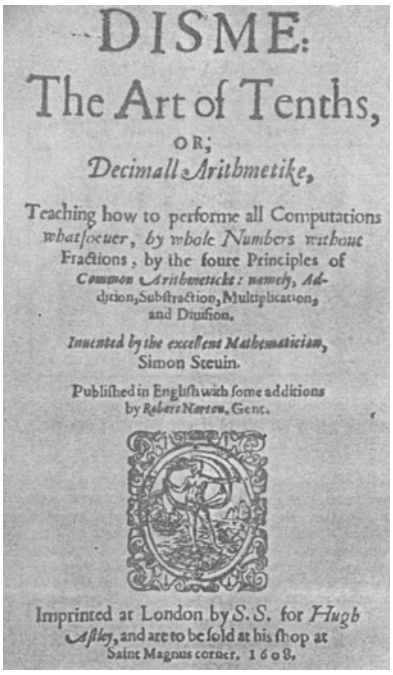
La divisione

La divisione viene effettuata moltiplicando il dividendo per l'inverso del divisore.

$\frac{1}{2}=\frac{30}{60}$	0;30	$\frac{1}{60}$	0;1	
$\frac{1}{3}=\frac{20}{60}$	0;20	$\frac{2}{3}=2\times\frac{1}{3}$	0;40	
$\frac{1}{6}=\frac{10}{60}$	0;10	$\frac{5}{6}=5\times\frac{1}{6}$	0;50	

Le frazioni sessagesimali sono poste sullo stesso piano degli interi

Questo è notevole se si pensa che i numeri **decimali cominciarono a diffondersi in Europa solo alla fine del '500**
[S. Stevin, 1585]


DISME:
The Art of Tenths,
OR;
Decimall Arithmetike,
Teaching how to performe all Computations whatsoeuer, by whole Numbers without Fractions, by the foure Principles of Common Arithmeticke: namely, Addition, Substraction, Multiplication, and Diuision.
Inuented by the excellent Mathematician, Simon Steuin.
Published in English with some additions by Robert Norton, Gent.
Imprinted at London by S. S. for Hugh Astley, and are to be sold at his shop at Saint Magnus corner. 1608.

L’inverso di ogni numero **regolare**, cioè contenente cioè solo i fattori **2, 3, 5 (i fattori primi di 60)** è esprimibile con una frazione sessagesimale finita

1 : 8
0 0, 125
10
8
20
16
40
40
0

0,125 = 125/1000 = 1/8

1 : 8
0 0; 7, 30
1 → 60
56
4 → 240
240
0

$$0;7,30 = \frac{7}{60} + \frac{30}{60^2} = \frac{7}{60} + \frac{1}{120} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$$

1 : 7
0 0, 142857…
10
7
30
28
20
14
60
56
40
35
50
49
1…

1 → 60 : 7
56 0; 8, 34, 17,...
4 → 240
238
2 → 120
119
1 → 60
…..

Gli inversi dei numeri irregolari come 7, 11, 13, … danno luogo a frazioni sessagesimali infinite periodiche

$$1/7 = 0;8, 34, 17, 8, 34, 17, 8, \ldots.$$

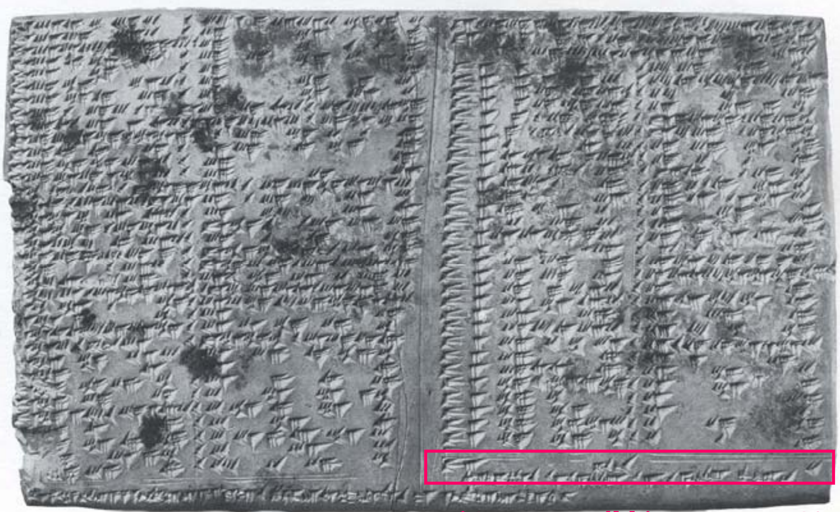
Nella più antica tavola di inversi (1800 a.C. circa) ci sono gli inversi dei numeri da 2 a 60.

Quando si tratta di calcolare gli inversi di **7, 11, 13, …59** lo scriba scrive che tali numeri **non hanno inverso**.

In YBC 10529 (Yale) c'è il calcolo approssimato degli inversi di numeri irregolari, per es. 1/59 → 0;1,1,1 [MCT, 16]

Tabella di inversi di numeri compresi fra 1 e 3

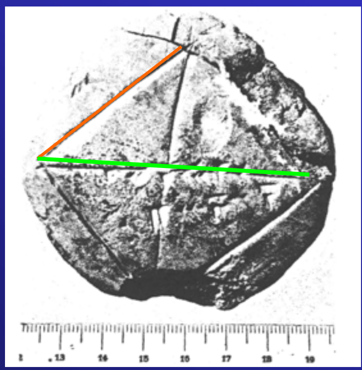
[MKT, I, 14-22]

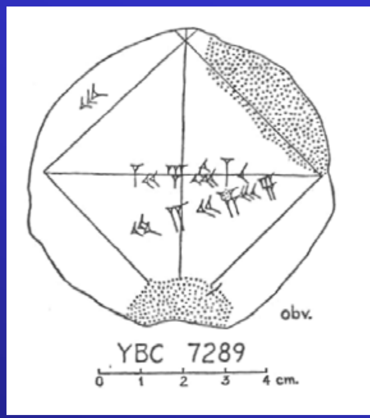


Louvre AO 6456

Approssimazione di $\sqrt{2}$, circa 1800 a.C.

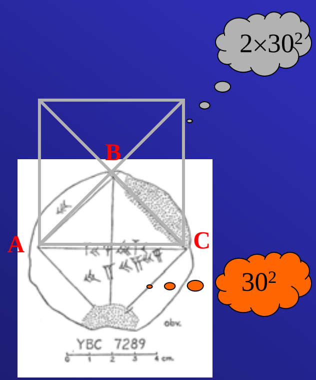
YBC 7289
MCT,42-43





Sul **lato del quadrato** è scritto **30** e sulla **diagonale** sono segnati i numeri **1; 24, 51, 10** e **42; 25, 35.**

La diagonale è ottenuta così: **42; 25, 35** = **30** × **1; 24, 51, 10**



42; 25, 35 = **30** × **1; 24, 51, 10**

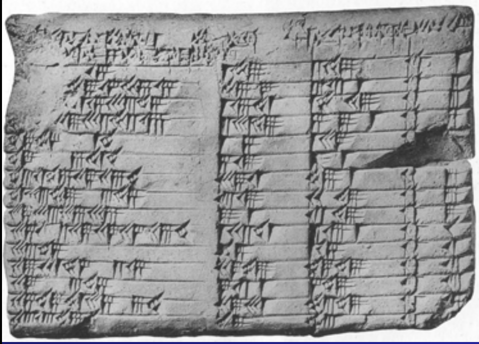
AC = 30 $\sqrt{2}$

1; 24, 51, 10 = 1, 414213

approssimazione molto buona di $\sqrt{2}$

Questa tavoletta da sola non dimostra che i Babilonesi conoscessero il "teorema di Pitagora" nella sua generalità, ma esistono altre tavolette in cui questo teorema viene usato in modo palese [p. e. MCT,142]

Plimpton 322 (1800 a.C., MCT, 38-39)



$\frac{b^2}{a^2}$ I	b II	c III	IV mu - bi - im
0; 59, 0, 15,	1, 59	2, 49	ki - 1
0; 56, 56, 58, 14, 50, 6, 15	56, 7	1, 20, 25	ki - 2
0; 55, 7, 41, 15, 33, 45,	1, 16, 41	1, 50, 49	ki - 3
0; 53, 10, 29, 32, 52, 16	3, 31, 49	5, 9, 1	ki - 4
0; 48, 54, 1, 40	1, 5	1, 37	ki - 5
0; 47, 6, 41, 40	5, 19	8, 1	ki - 6
0; 43, 11, 56, 28, 26, 40	38, 11	59, 1	ki - 7
0; 41, 33, 45, 14, 3, 45	13, 19	20, 49	ki - 8
0; 38, 33, 36, 36,	8, 1	12, 49	ki - 9
0; 35, 10, 2, 28, 27, 24, 26, 40	1, 22, 41	2, 16, 1	ki - 10
0; 33, 45	45	1, 15	ki - 11
0; 29, 21, 54, 2, 15	27, 59	48, 49	ki - 12
0; 27, 0, 3, 45	2, 41	4, 49	ki - 13
0; 25, 48, 51, 35, 6, 40	29, 31	53, 49	ki - 14
0; 23, 13, 46, 40	56	1, 46	ki - 15

La tavoletta mostra un elenco ordinato di numeri relativi a **15 terne pitagoriche**, cioè terne di numeri interi che soddisfano la relazione $a^2+b^2=c^2$

La I colonna della tavoletta presenta i valori corrispondenti al rapporto b^2/a^2 mentre la II e la III i valori di ***b*** e di ***c***, rispettivamente. L'ultima colonna indica invece semplicemente i numeri d'ordine, da 1 a 15, delle terne.

Le terne sono tutte primitive (con a e b primi fra loro) tranne la 11ª e la 15ª

$$a^2+b^2=c^2$$

Numeri d'ordine	c	b	a
1	169	119	120
2	4825	3367	3456
3	6649	4601	4800
4	18541	12709	13500
5	97	65	72
6	481	319	360
7	3541	2291	2700
8	1249	799	960
9	769	481	600
10	8161	4961	6480
11	75	45	60
12	2929	1679	2400
13	289	161	240
14	3229	1771	2700
15	106	56	90

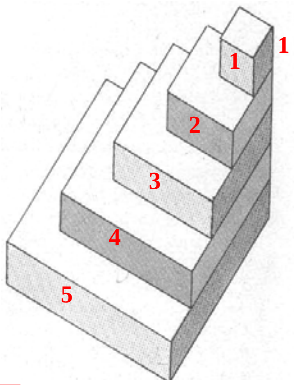
$72^2+65^2=5184+4225=9409=97^2$

È possibile che i Babilonesi conoscessero il meccanismo di formazione delle terne pitagoriche.

Euclide, *Elementi*, X,28.1

Tavoletta AO 6484 (epoca Seleucide)
Somma dei quadrati dei naturali da 1 a 10 (MKT, I, 99)

n = 5



Lurje 1948

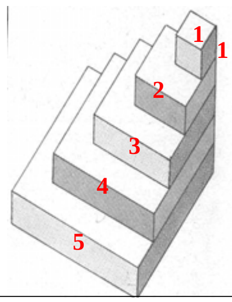
"Quadrati da 1 volte 1 fino a 10 volte 10, 100
Qual è il numero?
Tu moltiplichi 1 per 1/3, trovi 1/3
Tu moltiplichi 10 per 2/3, trovi 20/3.
1/3 + 20/3, trovi 7.
Tu moltiplichi 7 per 55, trovi 385.
Il numero è 385".

$$\left(1\times\frac{1}{3}+10\times\frac{2}{3}\right)\times 55 = 7\times 55 = 385$$

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{2n}{3}\right)\times\frac{n(n+1)}{2}$$

n = 10

$$S = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$



n = 5

1 cubetto unitario
4 cubetti unitari
9 cubetti unitari
16 cubetti unitari
25 cubetti unitari

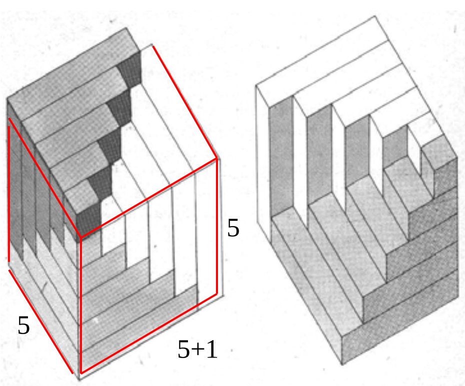
La somma dei cubetti unitari del **solido a scalini** rappresenta la **somma dei quadrati** dei numeri da 1 a 5.

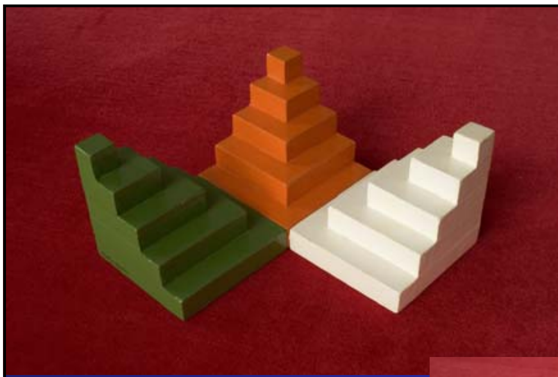
Assemblando tre di questi solidi ottengo un parallelepipedo di dimensioni 5× (5+1) × 5 più una scala formata da (1+2+3+4+5) cubetti unitari.

$$3S = 5(5+1)5+\frac{5(5+1)}{2} = 150+15 = 165$$

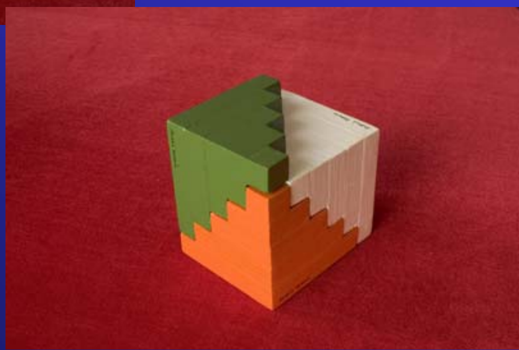
$$S = 55$$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



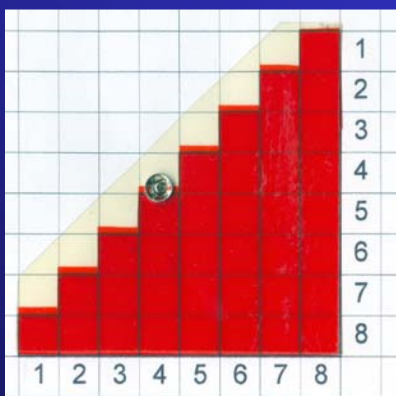


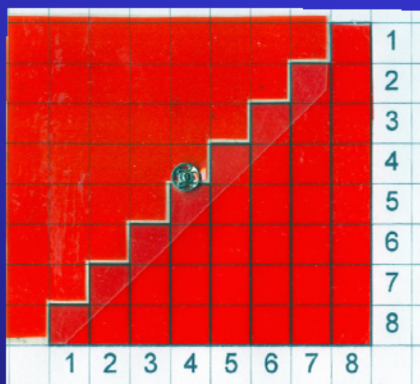
La somma dei quadrati dei numeri naturali



n = 5

Somma dei primi *n* numeri naturali

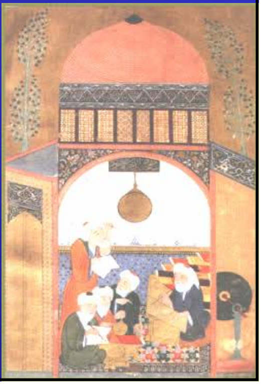




$$\frac{n(n+1)}{2}$$

L’eredità babilonese

Influenza
- sulla logistica greca
(aritmetica pratica e commerciale)
- su Diofanto (III sec.)
- sull’astronomia greca
- sulla matematica araba



Bibliografia essenziale

BOYER C., 1980, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano, Cap. 3.
FRIBERG J., 1984, *Numeri e misure nei primi documenti scritti*, Le Scienze 188, pp. 18-25.
GIACARDI L., 1987, *Sistema di numerazione e calcolo algebrico nella “Terra tra i due fiumi”*, in AA.VV., *L’alba dei numeri*, Dedalo, Bari.
GIACARDI L., ROERO C.S., 2010, *La matematica delle civiltà arcaiche. Egitto, Mesopotamia, Grecia*, Università popolare, Torino, Cap. 4.
HOYRUP J., 2010, *L’algèbre au temps de Babylone*, Paris, Vuibert
KLINE M., 1991, *Storia del pensiero matematico*, Torino, Einaudi, I, Cap. 1
LIVERANI M., 1988, *Antico oriente. Storia, società, economia*, Laterza, Bari
PETTI R., *Uri, il piccolo sumero*, Il Giardino di Archimede Un museo per la matematica, 2008
PETTI R., E. GIUSTI, *All’inizio del conto* – LABORATORI, Il Giardino di Archimede Un museo per la matematica,
http://web.math.unifi.it/archimede/archimede/index.html
NEUGEBAUER O., 1974, *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano.
PETTINATO G., 1988, *Babilonia, centro dell’Universo*, Rusconi, Milano.
PICHOT A., 1991, *La nascita della scienza. Mesopotamia, Egitto, Grecia antica*, Dedalo, Bari, Cap. I.
SCHMANDT-BESSERAT D., 1978, *Gli antecedenti della scrittura*, Le Scienze 120, pp. 6-15.

I testi cuneiformi

BRUINS E.M., RUTTEN M., 1961, *Mémoires de la Mission Archéologique en Iran*, Tome XXXIV, *Textes matbématiques de Suse*, Librairie orientaliste Paul Geuthner, Paris.

NEUGEBAUER O., 1973, *Mathematische Keilschrift-Texte*, I, II, III, Reprint, Springer Verlag, Berlin.

NEUGEBAUER O., SACHS A., 1945, *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society, New Haven.

THUREAU-DANGIN, F., 1938, *Textes mathématiques babyloniens*, E.J. Brill, Leiden.