Numeri e tecniche di calcolo nella Cina antica

Livia Giacardi

"Le matematiche fanno parte delle sei arti;
gli antichi le utilizzavano per ***selezionare***
le persone di talento*, per istruire i figli degli alti dignitari.*
Comunque vengano chiamate "le nove parti delle matematiche"
danno la capacità di esaurire le sottigliezze, di ***penetrare le cose più piccole, di esplorare senza limiti****"* [Liu Hui, circa 263]

- I documenti più antichi risalgono al **XIV secolo a. C.** e sono iscrizioni su ossa animali o su gusci di tartaruga con segni numerici.

Il quadrato magico Lo-shu

Una leggenda cinese (risalente almeno al V sec. a-C.) narra che l'imperatore *Yu* camminando lungo il fiume *Lo* scorse sul dorso di una tartaruga strani segni.
Lo shu (= diagramma del fiume Lo).
E' frequente nell'iconografia e nei testi cinesi in epoche successive con significati magici o divinatori.

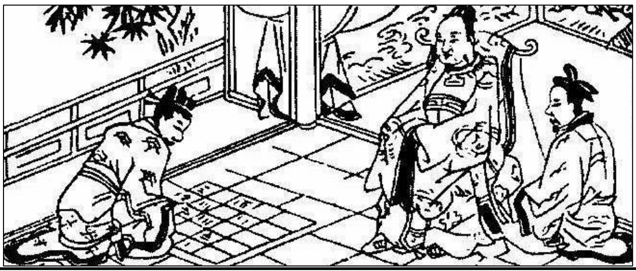
4	9	2
3	5	7
8	1	6

Solo a partire dal XII-XIII sec. fu esplicitamente riconosciuto come un quadrato magico.

dinastia Han (206 a.C. – 220) cominciano ad apparire i primi testi matematici specializzati. Il più antico testo matematico di cui disponiamo attualmente è *Jiuzhang suanshu*, cioè ***I nove capitoli sui procedimenti matematici*** scritto tra il I secolo a.C. e il I secolo. Ebbe un'influenza sulla matematica cinese successiva che si può paragonare a quella degli *Elementi* di Euclide in Occidente.

246 problemi ripartiti a seconda degli algoritmi risolutivi: area figure geometriche fondamentali, calcoli con le frazioni, regola del tre, estrazione di radice, volumi dei principali solidi, regola della falsa posizione, soluzione di sistemi di n equazioni lineari in n incognite (*fangcheng*), teorema di Pitagora.

Fu oggetto di **numerosissimi commenti.** **Rappresentazione dei numeri con le bacchette.**



Sotto le dinastie Sui (518-617) e Tang (618-907) la matematica era insegnata ufficialmente: gli studenti seguivano un periodo di studio di nove anni e poi affrontavano un esame pubblico di matematica (*mingsuan*). Lo studio veniva effettuato sul *Suanjing shinshu*, cioè *I dieci canoni di matematica* una raccolta composta di adattamenti di manuali antichi e di lavori contemporanei.

Si diffonde la conoscenza dei numerali indiani con lo zero.

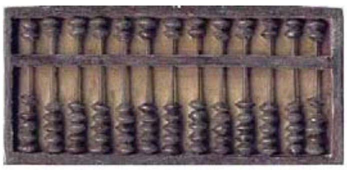
Dopo la dinastia Tang la matematica fu ancora insegnata con discontinuità fino al XII secolo, ma dopo di allora **non giocò più un ruolo significativo nell'educazione cinese.** Lo stato sociale dei matematici era generalmente basso.

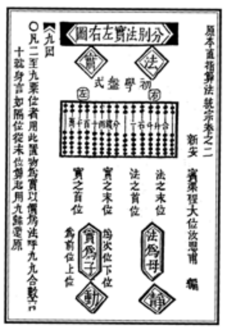
Il breve periodo che va dalla tarda dinastia Song agli inizi della dinastia Yuan (**XIII secolo**) è generalmente considerato **l'età dell'oro della matematica cinese**

“In che senso si può parlare di Rinascimento? L’aspetto più evidente sembra essere un ***rinnovato interesse per i testi del passato*** *tramandati come canoni, un fenomeno generale in quell’epoca e che non riguarda soltanto la matematica… Un … segno del grande valore attribuito dagli studiosi di matematica di epoca Song ai testi antichi è la* ***ripresa dell’attività di commento … al testo considerato sempre come il più importante, i Nove capitoli*** *… esprimendo anche la* ***necessità che i testi danneggiati venissero ripristinati senza aggiunte arbitrarie.*** *In questo senso si può ben dire che ad opera di alcuni personaggi dell’epoca si assiste ad un vero e proprio ‘Rinascimento’.”* [Chemla 2001]

- è perfezionato il **sistema di numerazione posizionale con il simbolo dello zero**, frazioni decimali;
- è utilizzato il **triangolo aritmetico** per il calcolo delle potenze del binomio;
- è utilizzato il “**metodo per estrarre radici** mediante addizioni e moltiplicazioni” (*zeng-cheng kaifang fa*) [metodo “Ruffini-Horner”];
- è elaborato un metodo detto della “grande espansione” (*dayan*) per risolvere **sistemi di congruenze lineari** (teorema, o meglio algoritmo, cinese dei resti), applicazioni a problemi di carattere economico e amministrativo;
- fa la comparsa una tipica tecnica algebrica cinese **“la procedura dell’elemento celeste”** (tianyuan), il cui oggetto matematico sono i polinomi in un’incognita.

Sotto la dinastia dei Ming (1368-1644) le principali conquiste delle epoche precedenti caddero in oblio.
L’abaco soppiantò le bacchette da calcolo segnando anche il declino della matematica cinese classica, i cui algoritmi mal si adattavano o non si adattavano affatto all’abaco.





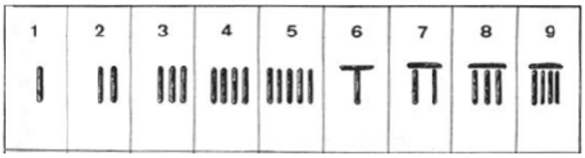
Da Cheng Dawei, *Origini generali dei metodi matematici, 1592*

Verso la fine della dinastia Ming la Cina venne in contatto con la matematica occidentale attraverso le due successive ondate di traduzioni ad opera dei missionari cristiani.

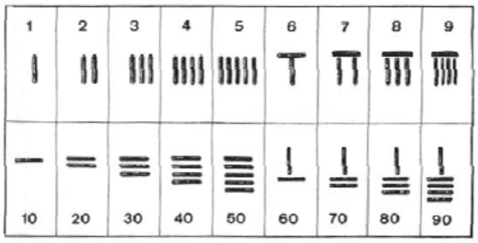
Il sistema di numerazione

Le bacchette erano dei bastoncini
di bamboo di circa 2.5 mm di diametro
e della lunghezza di circa 15 centimetri.
Furono in uso senza interruzione
dal 500 a.C. fino al 1500 circa
quando furono sostituite dall’uso dell’abaco.

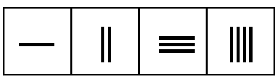
Il sistema era **decimale posizionale**.
I numeri venivano “scritti” con le bacchette usando nove segni base e le bacchette erano disposte in tavole.
Si lasciava uno spazio bianco per lo zero.



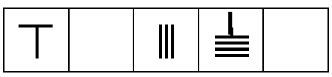
Per evitare errori di “lettura” dei numeri venivano usate due serie di nove segni rappresentanti le cifre da 1 a 9: nella prima le bacchette sono disposte verticalmente e nella seconda orizzontalmente.
L’orientazione delle bacchette veniva cambiata passando da un ordine numerico all’altro.



1234

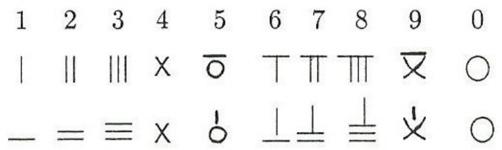


60390

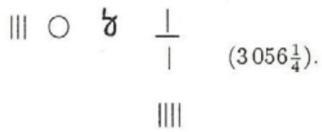


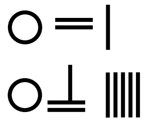
Dalla rappresentazione dei numeri con le bacchette sulle tavole si passò in un secondo tempo alla numerazione scritta e **nell'VIII secolo si introdusse un piccolo cerchio a rappresentare lo zero.**

Il matematico **Qin Jiushao** (1202-1261) nella sua opera "Scritti sui numeri in nove capitoli" (*Shushu jiuzhang*) usa le due serie di simboli.



Frazioni





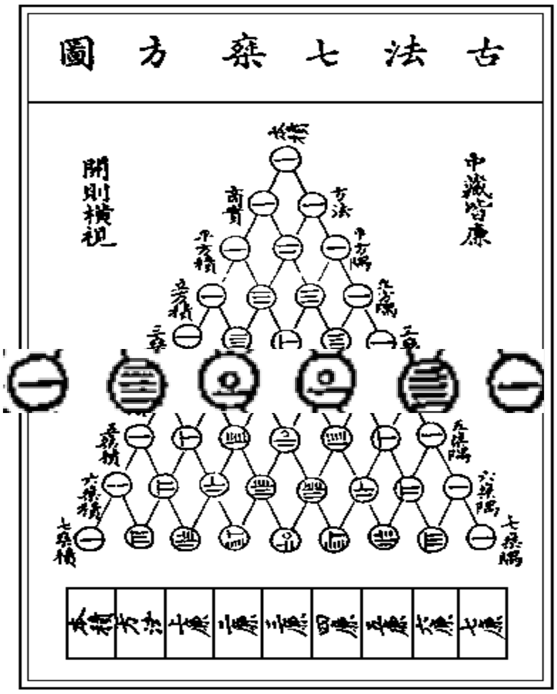
0, 21

0, 75

Frazioni decimali

Numeri negativi
(XIII sec.)

- 522



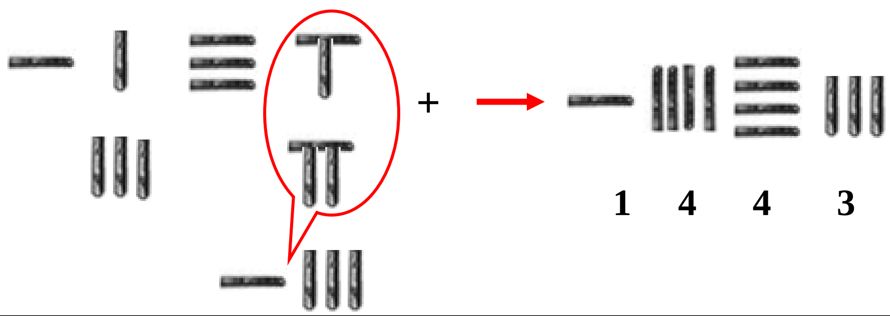
"Tavola del vecchio metodo dei sette quadrati moltiplicatori".
Triangolo aritmetico con i coefficienti binomiali fino all'ottava potenza
(tratta dal frontespizio dell'opera di Zhu Shijie *Prezioso Specchio dei quattro elementi*, 1303)

$$\boxed{(a+b)^n}$$

Le operazioni

L'addizione e la sottrazione venivano effettuate direttamente, tenendo presente che 5 bacchette devono essere sostituite da una per le cifre superiori a cinque.
Per distinguere i numeri negativi da quelli positivi si usavano bacchette nere e rosse rispettivamente (Liu Hui).

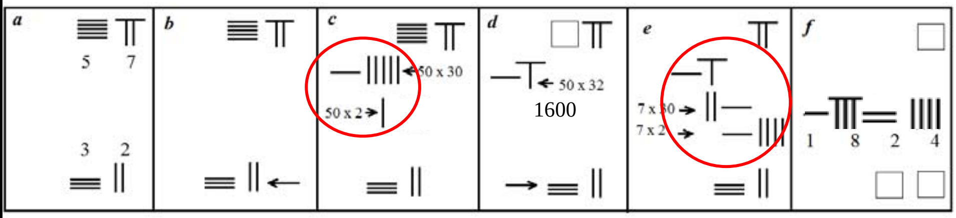
1136 + 307 = 1443



La moltiplicazione

Nel manuale *Sunzi suanjing* del IV-V sec. il procedimento è descritto così:
"Posiziona il moltiplicando nella fila superiore e il moltiplicatore in quella inferiore, il prodotto nella riga fra le due precedenti. Bisogna poi fare attenzione al modo di posizionare le cifre".

Si voglia moltiplicare 57 per 32. Si sistemi 57 in alto e 32 in basso. Il risultato si scrive nella riga di mezzo. Il calcolo utilizza la **proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione.**



♦ Si sposti il numero 32 di un posto verso sinistra (*b*), perché perché 57 contiene cifre nella posizione delle decine (si scalerebbe dunque di due posti se il numero superiore comportasse tre cifre).

♦ Si parta dalla cifra più alta di 57, cioè 5 [decine] e la si moltiplichi con le decine e le unità di 32, separatamente, e si posizionino opportunamente i numeri ottenuti (*c*).

♦ Si addizionino i risultati: 1600. Si rimuova ora la cifra più alta del moltiplicando e si riporti 32 al suo posto (*d*).

♦ Si moltiplichi ora l'unità 7 di 57 per le decine e le unità di 32 separando come prima le decine dalle unità.

♦ Si addizionino infine tutti i numeri della riga di mezzo per trovare il risultato finale:
$57 \times 32 = 1824$.

La divisione

Nel manuale *Sunzi suanjing* è scritto:
"Nella divisione inverti l'ordine posizionando le bacchette nella riga superiore per il quoziente, in quella di mezzo per il dividendo e in quella inferiore per il divisore".

L'algoritmo prescrive di disporre il dividendo nella riga di mezzo e il divisore al disotto.

				5	
		1	**8**	**2**	**4**
			3	**2**	

5×3 = 15 5×2 = 10

				5	
			3	2	4
			3	2	

1824 -1500 = 324

				5	
			3	2	4
			3	2	

324 – 100 = 224

				5	
			2	2	4
			3	2	

Ora moltiplico 5 per 3 e per 2 e sottraggo i risultati parziali dalla riga di mezzo tenendo conto della posizione

Faccio retrocedere di un posto il 32

				5	
			2	2	4
				3	2

7×3 = 21 7×2 = 14

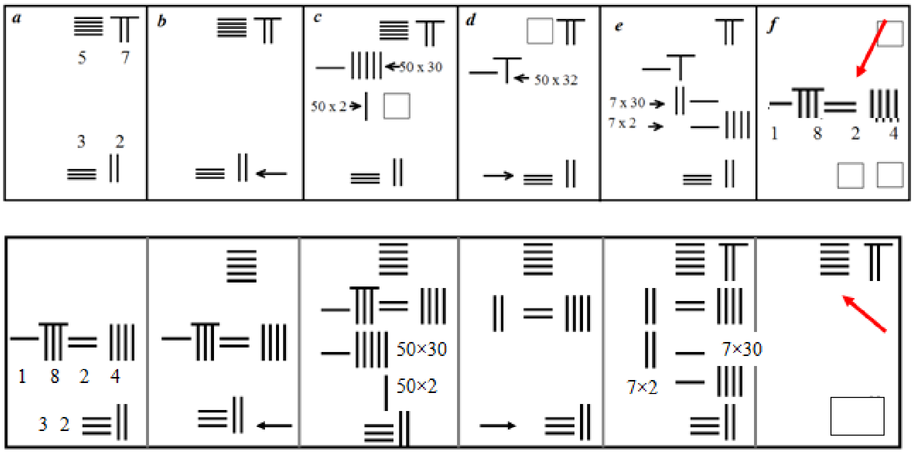
				5	7
				1	4
				3	2

La divisione 224 : 32 produce la cifra 7 che posiziono nella riga superiore.
Moltiplico 7 per 3 e per 2 e sottraggo i risultati parziali dalla riga di mezzo tenendo conto della posizione:

				5	7

Sulla tabella si legge il risultato: 57.

L'algoritmo cinese per la divisione riproduce all'inverso quello della moltiplicazione: il risultato nel caso della **moltiplicazione si trova nella riga di mezzo, nel caso della divisione nella riga superiore**; nella moltiplicazione nella riga superiore si **tolgono** via via le cifre man mano che si procede, mentre sono **aggiunte** una ad una nella divisione; nella riga di mezzo, nella moltiplicazione **si aggiunge il prodotto** di una cifra di sopra per il numero di sotto, mentre nella divisione **si sottrae**.



Altri esercizi

205 × 72

Calcoliamo 205×72
L'algoritmo che usiamo oggi è il seguente:

```
  205×
   72
 ------
   410
 14350
 ------
 14760
```

I passaggi dell'algoritmo della moltiplicazione rispecchiano la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

205× (70+2) =
= 205×70 + 205×2 = 14350+410.

Entrambi gli algoritmi sono basati sul **principio posizionale** e utilizzano la **proprietà distributiva**. Mentre nel nostro algoritmo il calcolo procede dalle unità agli ordini superiori, quello cinese procede dagli ordini superiori a quelli via via inferiori.

Calcoliamo 205×72

		2		5
			7	2

2 × 7 = 14   2 × 2 = 4

		2		5
1	4	4		
	7	2		

Si rimuove il 2 di 205; 5 × 7   5 × 2

				5
1	4	4 + 3	5	10
			7	2

Si rimuove il 5

1	4	7	5 +1	
			7	2

1	4	7	6	
			7	2

Il risultato si legge nella riga di mezzo

1312 : 23

Calcoliamo 1312: 23
Disponiamo i numeri nel seguente modo:

	1	3	1	2
			2	3

	1	3	1	2
	2	3		

23 non divide 13

	1	3	1	2
		2	3	

			5	
	1	3	1	2
		2	3	

5x2=10, 13-10=3

			5	
		3	1	2
		2	3	

5x3=15, 31-15=16

			5	
		1	6	2
			2	3

			5	7
		1	6	2
			2	3

7×2=14, 16-14=2

			5	7
			2	2
			2	3

7×3=21, 22-21=1

			5	7
				1
			2	3

Il risultato si legge nella prima riga e il resto nella seconda.

Il prodotto di 5 [decine] per 23 viene effettuato con l'algoritmo illustrato sopra per la moltiplicazione e pertanto si moltiplica 5 [decine] successivamente per 2 [decine] e poi per 3 [unità]: 1000+150.
Si sottrae ciascuno dei risultati parziali dal numero che compare nella riga di mezzo al disopra della cifra moltiplicata.

Il carattere algoritmico della matematica cinese

Motivazioni di ordine filosofico hanno giocato un ruolo non secondario nello spingere i matematici cinesi a consacrare gran parte dei loro sforzi agli algoritmi:

- gli **algoritmi** in quanto sequenze di operazioni che trasformano progressivamente i dati del problema hanno rappresentato per certi matematici della Cina antica **l'incarnazione nella matematica delle "mutazioni"** che operano su tutta la realtà. Il ***Libro delle mutazioni*** (*Yijing*) è il testo più citato.

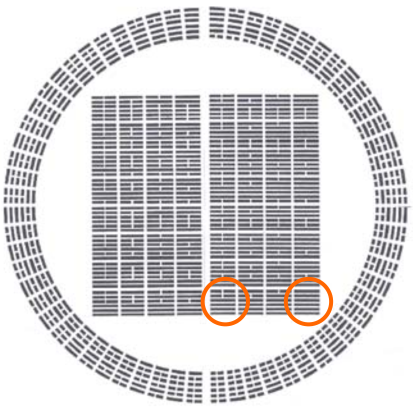
- il *Libro delle mutazioni* mostra come le trasformazioni che operano incessantemente nel mondo accadono per **interazione di due principi opposti, ma complementari, lo *yin* e lo *yang***, le cui manifestazioni si diversificano a seconda del dominio in cui le si osserva: le operazioni opposte, ma complementari, giocano un ruolo cruciale nella matematica della Cina antica. [Chemla 2007]

Gli esagrammi di Fu-hi e la base 2
Yijing o *Libro delle mutazioni* (300 a.C.)

Le due forze *Yin* ⟶ l'oscurità, il male — —

e *Yang* ⟶ la luce e il bene ——

Dalla combinazione dei due segni possiamo formare **8 trigrammi** (*cova*) e disponendo due trigrammi uno sull'altro si costruiscono **64 esagrammi**



G. W. Leibniz interpretò (1703) gli esagrammi di Fu-hi come la scrittura dei primi 64 numeri naturali in forma binaria e indagò le "mirabili proprietà della diadica"

0 — —   1 ——

$5=1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0$

1 0 1

[Luciano, Roero 2004]

Scrivi in notazione binaria i seguenti esagrammi di Fu-hi e converti in base 10

$1\times2^5 + 0\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 0\times2^1 + 1\times2^0$

1 0 1 1 0 1

$32 + 8 + 4 + 1 = 45$

$1\times2^5 + 1\times2^4 + 1\times2^3 + 1\times2^2 + 1\times2^1 + 1\times2^0$

1 1 1 1 1 1

$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63$

45 | 2
44 22 | 2
1 22 11 | 2
0 10 5 | 2
1 4 2 | 2
1 2 **1**
0

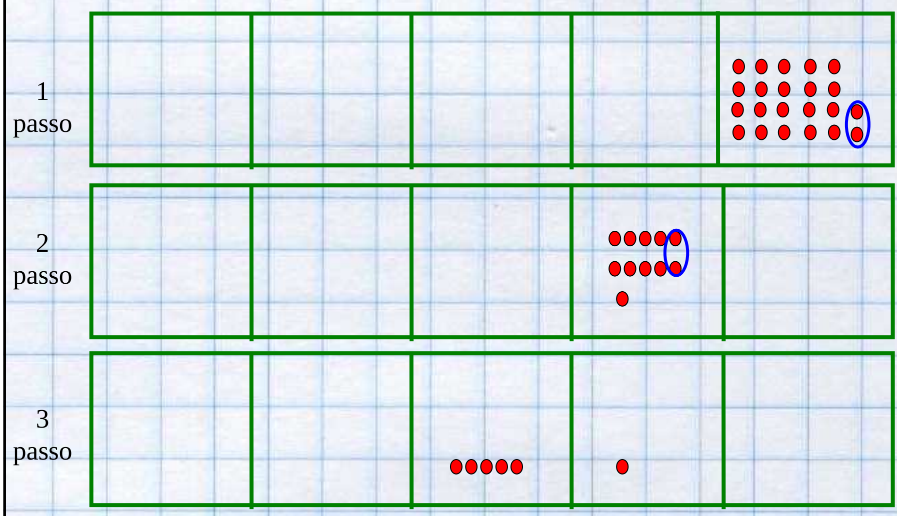
101101_2

22 | 2
22 11 | 2
0 10 5 | 2
1 4 2 | 2
1 2 **1**
0

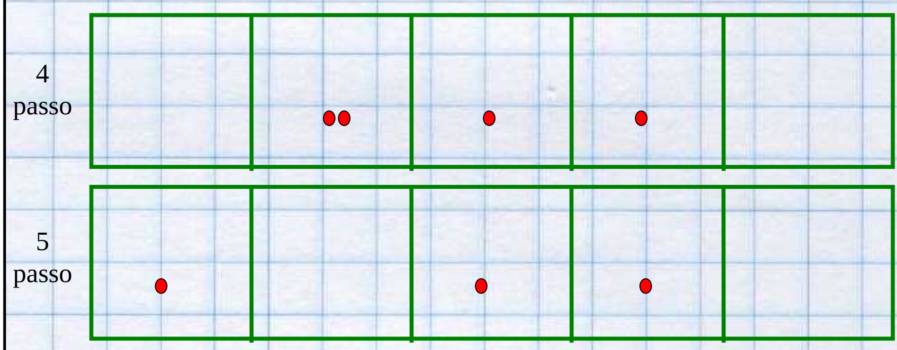
10110_2

Uso dell'abaco e dei gettoni

“Scriviamo” 22 in base 2 usando l’abaco



Perché si procede così?
“Scriviamo” 22 in base 2 usando l’abaco



1 0 1 1 0

$$1\times 2^4 + 0\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0$$

Esercizi di aritmetica binaria

```
 1011+
  110
------
10001
```

```
1011 -
 110
------
 101
```

Ricordare che 1+1 = 10

```
   1011 ×
    110
  -------
   0000
  1011
 1011
 -------
1000010
```

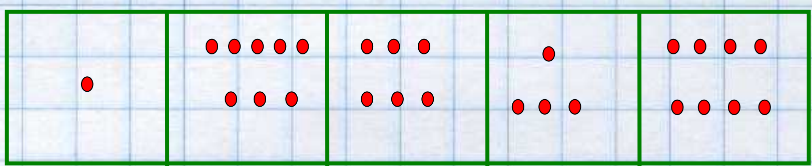
La moltiplicazione binaria è molto semplice perché gli unici numeri per cui si moltiplica sono **0** e **1**

Esercizio

Con quale base si è operato nella seguente addizione?

```
 5304 +
 2334
------
12042
```

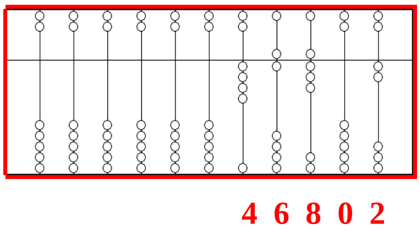
Effettuare la verifica con l’abaco

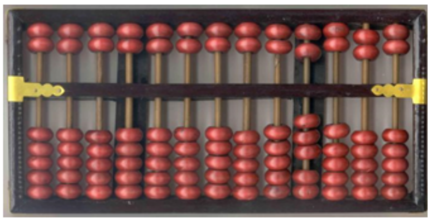


1 2 0 4 2

L'abaco cinese

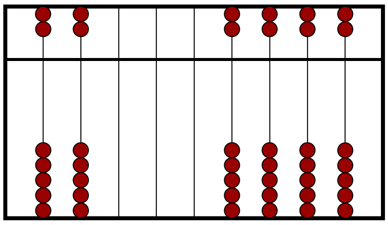
L'abaco cinese più diffuso è diviso in due parti, una superiore con **2 palline di valore 5** per ogni asticella, e una inferiore con **5 palline di valore 1** per ogni asticella.
Ogni asticella rappresenta una posizione decimale a partire da destra.
Nell'abaco in riposo le palline della fila superiore sono in alto e quelle della fila inferiore sono in basso.





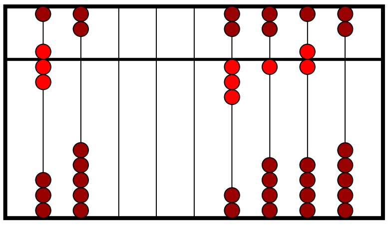
Abaco in riposo

Come eseguire la moltiplicazione con l'abaco



316 × 7

Come eseguire la moltiplicazione con l’abaco



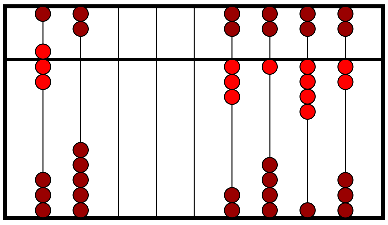
7 316

316 × 7

“scrivere” i numeri sull’abaco
lasciando libera la prima asticella

- moltiplica 6 × 7 = 42
- rimuovi il 6 e “scrivi” 42 nelle asticelle di posto 1 e 2

Come eseguire la moltiplicazione con l’abaco



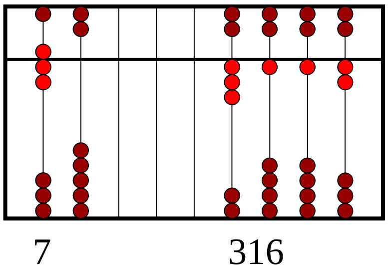
7 316

316 × 7

“scrivere” i numeri sull’abaco
lasciando libera la prima asticella

- moltiplica 6 × 7 = 42
- rimuovi il 6 e “scrivi” 42 nelle asticelle di posto 1 e 2
- moltiplica 1 × 7 = 7
- rimuovi 1 e “scrivi” 7 nell’asticella di posto 2 (7 sono decine)

Come eseguire la moltiplicazione con l'abaco

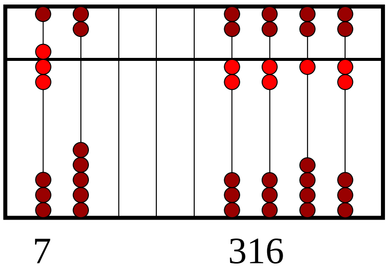


316 × 7

"scrivere" i numeri sull'abaco
lasciando libera la prima asticella

- moltiplica 6 × 7 = 42
- rimuovi il 6 e "scrivi" 42 nelle asticelle di posto 1 e 2
- moltiplica 1 × 7 = 7
- rimuovi 1 e "scrivi" 7 nell'asticella di posto 2 (7 sono decine). 4+7=11
- moltiplica 3 × 7 = 21
- rimuovi il 3 e aggiungi 21 nelle asticelle di posto 3 e 4
(si sta aggiungendo 2100)

Come eseguire la moltiplicazione con l'abaco



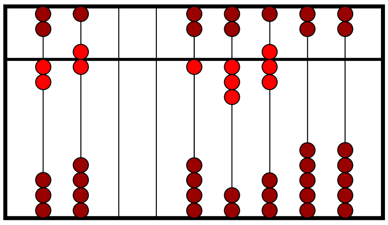
316 × 7

"scrivere" i numeri sull'abaco
lasciando libera la prima asticella

- moltiplica 6 × 7 = 42
- rimuovi il 6 e "scrivi" 42 nelle asticelle di posto 1 e 2
- moltiplica 1 × 7 = 7
- rimuovi 1 e "scrivi" 7 nell'asticella di posto 2 (7 sono decine)
- moltiplica 3 × 7 = 21
- rimuovi il 3 e aggiungi 21 nelle asticelle di posto 3 e 4
(si sta aggiungendo 2100)

Risposta: 2212

Come eseguire la moltiplicazione con l’abaco



7 316

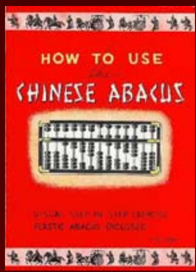
137 × 26

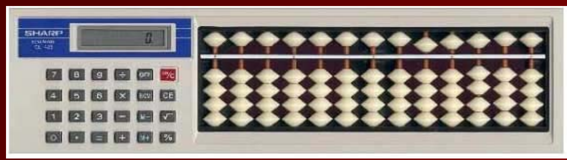
“scrivere” i numeri sull’abaco lasciando libera le prime due asticelle

- moltiplica 2 × 7 = 14 rimuovi 7 e “scrivi” 14 nelle asticelle di posto 3 e 2
- 6 × 7 = 42 “scrivi” 42 nelle asticelle di posto 1 e 2 e aggiungi il precedente prodotto (= 182)
- 2 × 3 = 6 aggiungi questo prodotto nella asticella di posto 3 (= 782)
- 6 × 3 = 18 aggiungi questo prodotto nelle asticelle di posto 3 e 2 (= 962)
- 2 × 1 = 2 rimuovi 1 e “scrivi” 2 nell’asticella di posto 4 (= 2962)
- 6 × 1 = 6 aggiungi il prodotto nell’asticella di posto 3

Risposta: 3562

In Cina, in Giappone e in Russia gli abachi sono tuttora in uso nella scuola elementare e secondaria e, negli anni cinquanta, erano di uso comune in negozi e magazzini.





Abaco giapponese

Abachi a Mosca negli anni cinquanta

Abaco gigante in un parco giochi, Waiouojia, Cina

Indicazioni bibliografiche

In lingua italiana si vedano:

G. Ifrah, *Il sistema posizionale degli intellettuali cinesi*, in *Storia universale dei numeri*, Milano Mondadori, 1984, pp. 430-439

E. Luciano, C.S. Roero, *Dagli esagrammi di Fo-hy all'aritmetica binaria: Leibniz e Peano*, in *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2003-2004*, a cura di E. Gallo, L. Giacardi, O. Robutti, Ass. Sub. Mathesis, Torino, 2004, pp. 49-69

J. Needham, *Matematica, Scienza e Civiltà in Cina*, Einaudi, Torino, 1985.

Storia della Scienza, vol. II *Cina, India, Americhe*, Roma, Istituto della Enciclopedia Italiana, 2001, pp. 125-155, 328-344.

M. Bartolini Bussi, *Perché i bambini cinesi sono più bravi in matematica?*i. F. Ferrara, L. Giacardi, M. Mosca, *Conferenze e Seminari dell'Associazione Subalpina Mathesis 2007-2008*, Torino, 2008, pp. 335-347.

R. Petti, E. Giusti, *All'inizio del conto* – LABORATORI, Il Giardino di Archimede Un museo per la matematica, http://web.math.unifi.it/archimede/archimede/index.html

Altro:

K. Chemla, *Les neuf Chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires*, Paris Dunod 2004.

K. Chemla, *Le réel en Mathématiques : Quelques Vues Prises De Chine Ancienne*, Associazione Subalpina Mathesis, Conferenze e Seminari 2006-2007, Torino, Kim Williams Books, 2007, pp. 159-181.

S. Kangshen, J. Crossley, A. Lun, *The Nine Chapters on the Mathematical Art. Companion and Commentary*, Oxford, University Press, 1999

J.C. Martzloff, *Chinese mathematics*, in I. Grattan-Guinness (editor), *Companion Encyclopediaof the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, London, Routledge 1994, I, pp. 93-103.

J. Needham, *Science and Civilisation in China*, vol. III, *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Cambridge, University Press, 1959

Biografie dei principali matematici della Cina antica si possono trovare sul sito:
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Indexes/Chinese.html