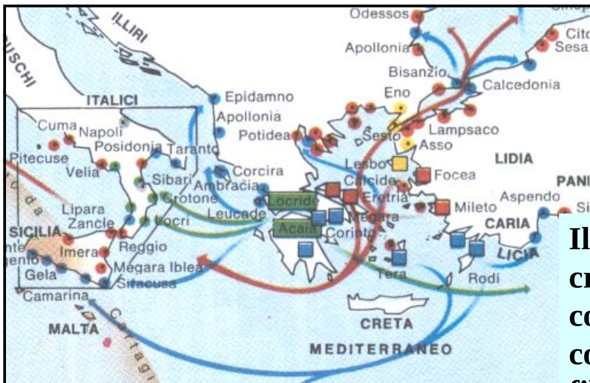
Numeri figurati nella storia

Livia Giacardi
12 marzo 2011



I numeri figurati nascono in Grecia

Il pensiero greco è il vero creatore della matematica come teoria razionale e come sistema logico e della filosofia come approccio razionale ai problemi della vita e del mondo.

logistica, tecnica di calcolo

sistema additivo in base 10 poco maneggevole (gli astronomi usavano quello sessagesimale posizionale babilonese)

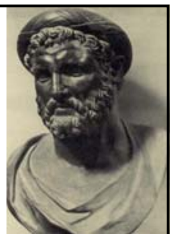
abachi

aritmetica, scienza pura del numero, teoria dei numeri

Platone (IV sec. a.C.) considerava la logistica come una disciplina adatta all'uomo d'affari e all'uomo di guerra, mentre il filosofo deve coltivare l'aritmetica *"poiché deve emergere dal mare del mutamento e afferrare il vero essere"*, *" l'aritmetica ha un grande potere nell'elevare la mente costringendola a ragionare intorno ai numeri astratti"*

Godono dello statuto di ἄριθμοι solo i numeri interi.
Esistono anche i rapporti di interi, ma non sono concepiti come numeri.
Le frazioni esistono come parti dell'unità monetaria o di misura e interessano solo la logistica.

Pitagora e la sua scuola VI-V sec.a.C.



Nasce a Samo nel 572 a. C.

"I più dicono che egli apprese le cosiddette scienze matematiche dagli Egizi, dai Caldei e dai Fenici; ché già nei tempi più antichi gli Egizi si dedicarono allo studio della geometria, i Fenici allo studio dell'aritmetica e della logistica, i Caldei all'osservazione degli astri" (Porfirio, *Vita di Pitagora*)

Intorno al 520 a.C. si trasferisce in Italia e a Crotone dà vita alla sua scuola

*"Pitagora esponeva i suoi insegnamenti a chi lo frequentava o distesamente o per simboli. Che il suo insegnamento era di due modi: e quelli che lo frequentavano si distinguevano in **Matematici** e **Acusmatici**. Matematici erano quelli che conoscevano la parte più importante e più approfondita della sua dottrina, Acusmatici quelli cui erano insegnate solo le regole sommarie senza accurate spiegazioni"* (Porfirio, *Vita di Pitagora*)

Il risentimento degli esclusi dalla setta, il carattere chiuso della comunità pitagorica, il potere oligarchico esercitato su tutta la città, crearono tensioni e poi un vero conflitto che portò allo sterminio di alcuni Pitagorici e all'esilio di altri.

Pitagora si rifugiò a Metaponto dove morì alla fine del VI sec.a. C.

I filoni di ricerca

- teoria numeri (aritmogeometria)
- problematiche connesse con la scoperta delle grandezze incommensurabili
- teoria delle proporzioni
- prime dimostrazioni geometriche (teorema di Pitagora, solidi regolari)

"Tutto è numero"

"Si dedicarono alle matematiche e per primi le fecero progredire i cosiddetti Pitagorici. Questi, dediti a tale studio, credettero che i principi delle matematiche fossero anche ***principi di tutte le cose che sono****. Ora, poiché principi delle matematiche sono i numeri, e nei numeri essi credevano di trovare, più che nel fuoco e nella terra e nell'acqua, somiglianze con le cose che sono e che divengono […] e poiché inoltre vedevano espresse dai numeri le proprietà e i rapporti degli accordi armonici, poiché insomma ogni cosa nella natura appariva loro simile ai numeri, e i numeri apparivano primi tra tutto ciò che è nella natura,* ***pensavano che gli elementi dei numeri fossero elementi di tutte le cose che sono, e che l'intero mondo fosse armonia e numero****"* (Diogene Laerzio, *Vite dei filosofi*)

“I Pitagorici pensano che il numero sia d'un modo solo, e cioè matematico, se non che non lo considerano separato dalle cose, ma dicono che da numeri sono composte le sostanze percepibili. Di numeri infatti compongono l'intero cielo; ma non di numeri formati da unità senza grandezza, ché essi ***attribuiscono grandezza alle unità. Quanto alla prima unità dotata di grandezza, come essa sia composta, sembra che non sappiano dire*** *[…] Essi dicono che il numero è le cose che sono, o almeno applicano i loro teoremi ai corpi, come se i numeri fossero dei corpi”* (Aristotele, *Metafisica*)

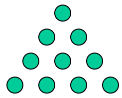
aritmosofia pitagorica

1 ragione

2 opinione, femminile

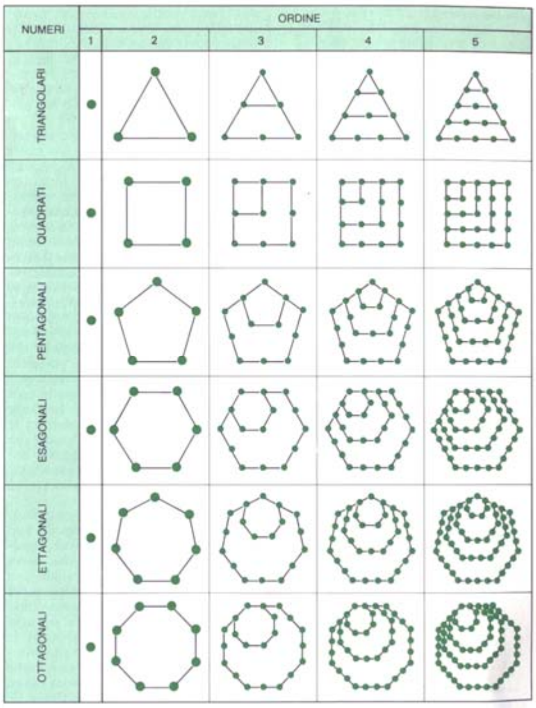
3 armonia, maschile

2+3 sposalizio



tetractys 10 = 1 + 2 + 3 + 4

fonte e radice dell'eterna natura



Aritmogeometria

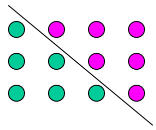
uso, finalizzato ad ottenere conoscenze di tipo aritmetico, di un algoritmo che consiste nel **rappresentare i numeri naturali con configurazioni geometriche di punti** (*numeri figurati o poligonali*)

Secondo **Nicomaco di Gerasa** (I-II sec.), ***Introduzione all'aritmetica,*** i Pitagorici scoprirono, mediante l'aritmogeometria semplici proprietà dei numeri figurati

1. un generico numero triangolare T_n si ottiene sommando i primi n numeri naturali:

$$T_n = 1+2+3+4+...+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad n = 1,2,3,...$$

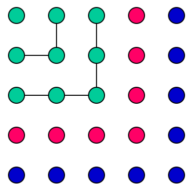
Esempio: $T_3 = 6 = 1+2+3 = \frac{3\times 4}{2}$



2. un generico numero quadrato si ottiene sommando i numeri dispari, a partire dall'unità: $\mathbf{Q_n}= n^2= 1+3+5+\ldots+(2n-1)$

$n = 1,2,3,...$

Esempio: **3^2 = 1+3+5= 9**
4^2 = 1+3+5+7 = 16
5^2 = 1+3+5+7+9 = 25



3. un generico numero pentagonale P_n si ottiene sommando i numeri naturali a partire dall'unità così:

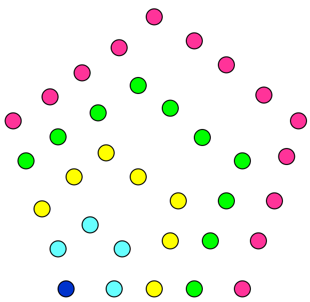
$$P_n = 1+4+7+10+...+(3n-2)$$

$n = 1,2,3,...$

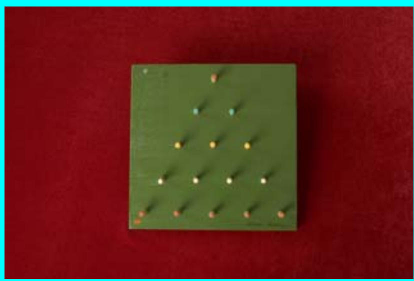
La differenza tra ciascun numero e quello che lo precede è 3

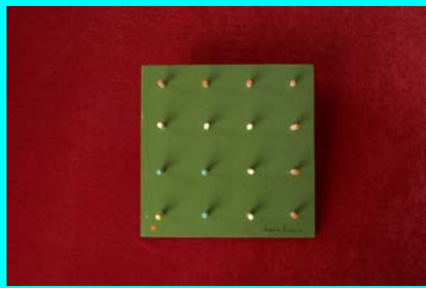
Esempio:

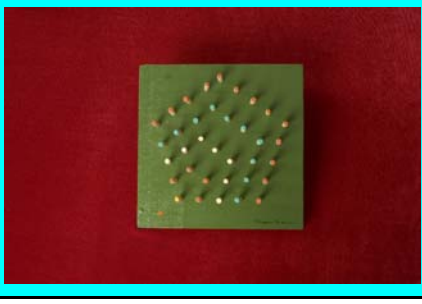
P_4 = 1+4+7+10 = 22
P_5 = 1+4+7+10+13 = 35

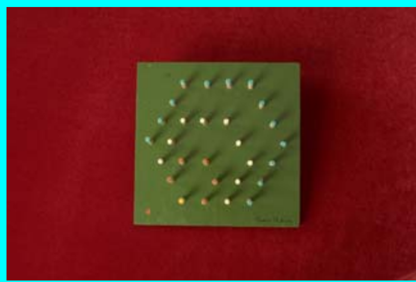


I numeri figurati

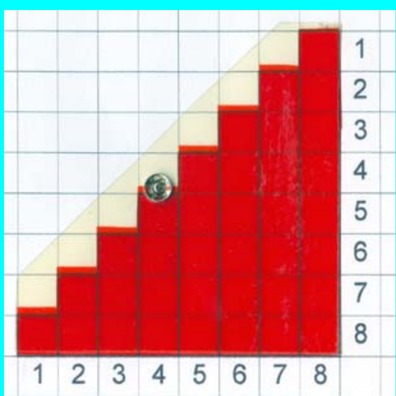


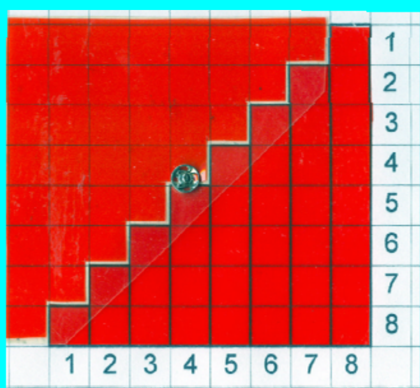




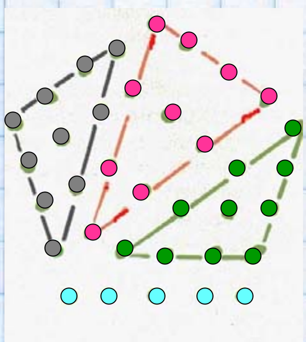


Somma dei numeri naturali





Trovare la formula che esprime l'n-esimo numero pentagonale osservando la figura



$$P_5 = 5 + 3T_4$$

$$P_n = 1 + 4 + 7 + 10 + \ldots + (3n-2) = n + 3T_{n-1} =$$

$$n + 3\frac{(n-1)n}{2} = \frac{2n + 3n(n-1)}{2} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

I) 1+2+3+4+…+n T_n

II) 1+3+5+7+…+(2n-1) Q_n

III) 1+4+7+10+…(3n-2) P_n

È costante la differenza fra ciascun numero e quello che lo precede immediatamente
in I) la differenza è **1**
in II) la differenza è **2**
in III) la differenza è **3**

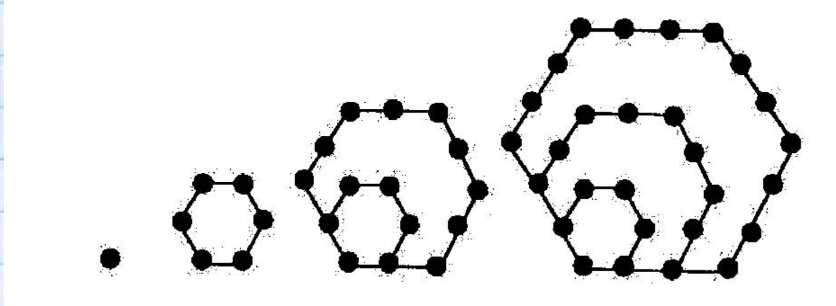
1, 2, 3, 4, … progressione aritmetica di ragione 1
1, 3, 5, 7, … progressione aritmetica di ragione 2
1, 4, 7, 10, ... progressione aritmetica di ragione 3

Sembra che sia stato Ipsicle (II sec. a.C.) a stabilire un **collegamento tra numeri poligonali e progressioni aritmetiche,** come riferisce Diofanto (III sec.), nel suo ***Libro dei numeri poligonali***.

Il generico numero poligonale di *n* lati si ottiene sommando i termini di una progressione aritmetica avente come primo termine l'unità e ragione il numero *n* dei lati del poligono meno 2.

Molti matematici nel corso dei secoli, cercarono di penetrare la proprietà di questi numeri: **Diofanto, Fermat, Descartes, Euler, Gauss, Cauchy,…**

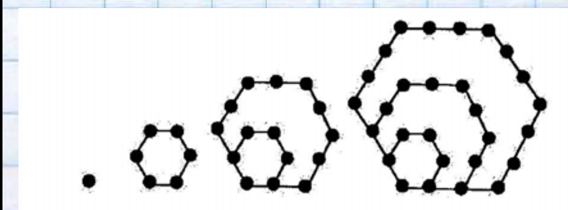
Come posso costruire il numero esagonale E_4?



Uso una progressione aritmetica di ragione **4**

$$E_4 = 1 + 5 + 9 + 13$$

Come posso indicare il termine di posto n?



Indico con d la differenza fra un termine e quello che lo precede.
Scrivo i successivi termini così e osservo:

a_1 1

a_2 1 + d — d = 4

a_3 (1+d) + d = 1 + 2d

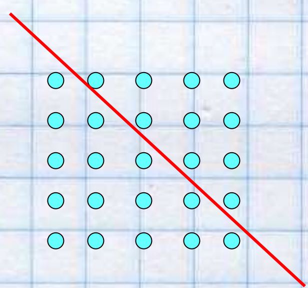
a_4 (1 +2d) + d = 1 + 3d

…

a_n 1 + (n-1)d — a_n 1 + (n-1)4 = 4n -3

$$E_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \ldots + (4n - 3)$$

Numeri triangolari consecutivi



$$\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$$

[Nicomaco, ***Introduzione all'aritmetica,*** XII, 248]

Giovanni Vailati
Crema 24.4.1863 - Roma 14.5.1909

♦ "spedantizzare" e rendere più piacevole la lezione
♦ "antidoto contro il dogmatismo"
♦ permette di comprendere meglio l'unità profonda del sapere

Federigo Enriques
Livorno 5.1.1871 - Roma 14.6.1946

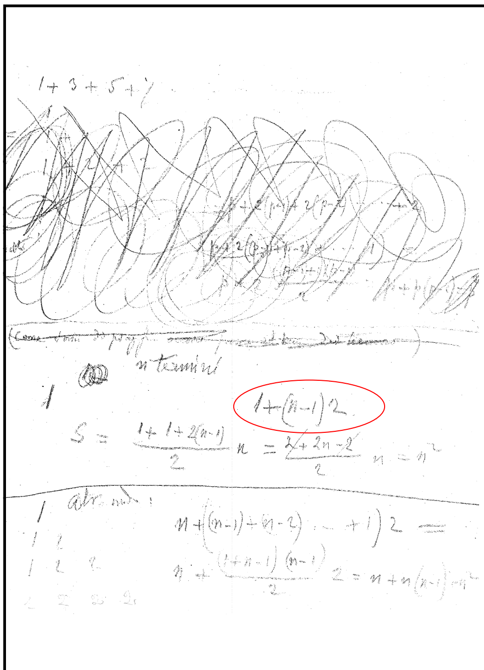
"La formazione di docenti di matematiche, che siano all'altezza dei loro compiti didattici, richiede, in genere, che la scienza sia da loro appresa non soltanto nell'aspetto statico, ma anche nel suo divenire. E quindi che lo studioso ***apprenda dalla storia a riflettere sulla genesi delle idee, e d'altro lato partecipi all'interesse per la ricerca"***
[Enriques 1938]

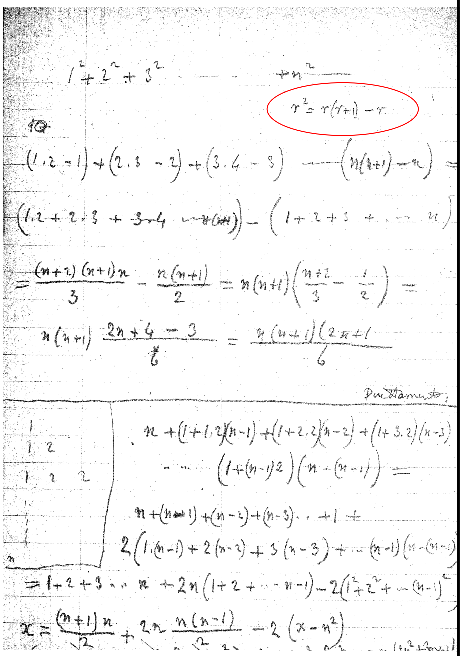
Per quanto riguarda la **somma dei numeri dispari**, dapprima esprime l'ennesimo numero dispari della successione sfruttando il fatto che si tratta di una progressione aritmetica di ragione 2, poi sfrutta la proprietà che **in una progressione aritmetica la somma di due qualsiasi termini equidistanti dagli estremi è eguale alla somma degli estremi**, da cui ricava facilmente il valore della somma degli n termini come prodotto di n per la semisomma degli estremi, cioè n^2 . In altro modo, dà la seguente **visualizzazione** del problema:

1
1 2
1 2 2
1 2 2 2
…,

da cui, sommando per colonne e, sfruttando la formula della somma dei primi $n-1$ numeri naturali, con semplici passaggi algebrici arriva a ottenere la somma n^2.

[G. Vailati, Appunti per Lezioni, Istituto Tecnico, Como 1901-1904, *Fondo Vailati*, cit., Cartella 38, fasc. 340].





Appunti Lezioni, Istituto Tecnico, Como 1901-1904, *Fondo Vailati*

Enriques: per facilitare la comprensione di alcune proprietà aritmetiche agli studenti della scuola media propone loro i modelli geometrici pitagorici dei numeri, i cosiddetti "numeri figurati":

"**L'aritmetica è introduzione ed avviamento all'Algebra**, e perciò ha il suo posto naturale nei primi gradi della scuola media in generale e in particolare nella scuola classica. I vigenti programmi che le assegnano questo posto, indicano anche il carattere dell'insegnamento, intuitivo e pratico, in rapporto alla mente dei giovani allievi. [...] Così inteso l'insegnamento dell'Aritmetica dà luogo a problemi didattici estremamente delicati. **Se l'allievo deve partecipare in modo attivo a questo studio, non si può dargli definizioni e regole senza spiegazione, come doni piovuti dal cielo**, di cui poi quegli che riceve il dono non saprebbe servirsi. [...] **La storia della scienza viene qui in soccorso, mostrandoci come le verità aritmetiche siano state riconosciute dai Pitagorici mediante modelli geometrici dei numeri, quali sono i numeri figurati:** numeri quadrati e rettangolari, numeri triangolari, ecc. "
[F. Enriques, *Prefazione*, in A. Enriques, *Aritmetica ad uso delle scuole medie inferiori*, Bologna Zanichelli,1934, pp. IX-XI].

Diofanto di Alessandria (III sec.)

è l'ultimo matematico greco creativo.

"La sua giovinezza durò 1/6 della sua vita; poi la sua barba crebbe per 1/12; si sposò dopo 1/7 e gli nacque un figlio dopo 5 anni. Il figlio visse la metà degli anni del padre e il padre morì 4 anni dopo il figlio"

$$\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x \qquad x = 84$$

La sua opera si discosta nei metodi dalla matematica greca classica e recupera della tradizione logistica e l'eredità babilonese

Le Aritmetiche 13 libri, circa 200 problemi
6 libri (manoscritto greco), 4 libri (manoscritto arabo)
Risolve problemi riconducibili a equazioni determinate e indeterminate.
Lavora sui numeri razionali.
Ebbe molta influenza sulla nascita della teoria dei numeri.

Libro dei numeri poligonali

[Diophante d'Alexandrie, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Bruges, Desclée, De Brouwer, 1926, pp. 277-295]

Diofanto dimostra con l'uso della geometria alcune proprietà delle progressioni aritmetiche, e grazie ad esse riesce a dare un metodo di calcolo per i numeri poligonali.

Proposizione I

- *"Se tre numeri si superano l'un l'altro di una stessa quantità, otto volte il prodotto del più grande e del medio più il quadrato del più piccolo forma un quadrato, la cui radice è uguale alla somma del più grande e del doppio del medio."* (p. 278-279)
- Vale a dire, dati **a, a+d, a+2d** si può scrivere:

$$\mathbf{8\,(a+d)\cdot(a+2d) + a^2 = (a+2d + 2(a+d))^2}$$

Proposizione II

- *"Se dei numeri in quantità qualsiasi hanno uguale differenza tra loro, (la differenza) tra il più grande e il più piccolo è un multiplo della differenza che c'è tra un numero e il successivo, il quale procede di una quantità inferiore di un'unità rispetto alla quantità dei numeri considerati."* (p. 280)
- Vale a dire, in una progressione aritmetica la differenza tra il primo e l'ultimo termine è pari alla ragione della progressione moltiplicata per il numero dei termini meno uno:
- **$P(n)= a_1, a_2, a_3, \dots , a_n$ con $a_{i+1} - a_i = d$, allora $a_n - a_1 = d(n-1)$**

Dimostrazione

- Diofanto rappresenta i numeri come segmenti (di lunghezza proporzionale al loro valore), con un estremo comune B.

- Considera **BA, BC, BD, BE** numeri qualsiasi, con uguale differenza tra ciascuno di essi e il successivo.
  Dimostra che la differenza tra BA e BE (**EA**) è un multiplo della differenza tra BA e BC.

- Siccome BA, BC, BD, BE hanno uguale differenza tra loro, allora AC=CD=DE, e pertanto EA è multiplo di AC, perché la quantità AC “procede” tre volte.

- Osserva poi che AC, CD e DE sono “in quantità inferiore di un’unità” rispetto al numero di termini della progressione, perciò può esprimere EA come prodotto di AC per il numero di termini della progressione meno uno.

- AE è la differenza tra AB e BE, che sono rispettivamente il più grande e il più piccolo numero della progressione e AC è la ragione.

Proposizione III

- *“Se dei numeri in quantità qualsiasi hanno uguale differenza tra loro, la somma del più grande e del più piccolo, moltiplicata per la quantità dei numeri, forma un numero doppio rispetto alla somma dei numeri considerati.”* (p. 280-282)

- Vale a dire la somma dei termini di una progressione aritmetica è pari alla metà del prodotto della somma degli estremi per il numero dei termini.

- **$P(n) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ con $a_{i+1} - a_i = d$**
- **$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = n\,(a_1 + a_n)/2$**

- Estendendo la Proposizione I, ottiene la:

Proposizione IV

- *"Se, partendo dall'unità, dei numeri in quantità qualunque hanno uguale differenza, la loro somma, moltiplicata otto volte per la differenza tra un numero e il successivo, più la differenza diminuita di due ed elevata al quadrato, diventa un quadrato la cui radice, diminuita di due unità, è multipla della differenza, la quale procede di un numero che, aumentato di un'unità, è il doppio della quantità dei numeri considerati, compresa l'unità."* (p. 282-287)

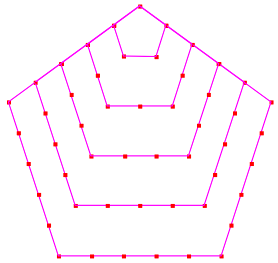
- Vale a dire, data la successione **1, 1+d, 1+2d, … , 1+(n-1)d** di **n** termini, la cui somma è **s**, si può scrivere:

$$8\,s \cdot d + (d-2)^2 = ((2n-1)d + 2)^2$$

- Le proposizioni I- IV, permettono a Diofanto di giungere al legame tra progressioni aritmetiche e numeri poligonali.

- *"se abbiamo una quantità qualsiasi di numeri, partendo dall'unità, che hanno uguale differenza tra loro, la somma è un **NUMERO POLIGONALE** che ha tanti angoli quanto vale la differenza tra numeri successivi, aumentata di due, e su ogni lato ha il numero dei termini."* (p. 287-288)

- Per esempio:



- **a_1= 1, a_2= 4, a_3= 7, a_4= 10, a_5= 13, a_6= 16**
  $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$ = 51
  $a_n - a_{n-1}$ = d = 3 (3+2 angoli)
  il numero **51** è pentagonale di lato **6**

Diofanto affronta anche il problema:

"dato un numero, cercare in quanti modi può essere un numero poligonale" (p. 292-294)

la dimostrazione però si interrompe perché il testo è incompleto. Completandola si arriva alla formula:

2P = n[(n-1)(a-2) + 2]

dove ***P*** è il numero dato, ***n*** il lato e ***a*** il numero di angoli.

Di qui

$2\frac{P}{n} = 4 + an - a - 2n$ e $a = 2 + \frac{2(P-n)}{n(n-1)}$, dunque

$2\frac{P}{n}$ e $\frac{2(P-n)}{n(n-1)}$ devono essere interi e a non può essere minore di 3.

dunque

$\frac{2(P-n)}{n(n-1)} \geq 1$ e di conseguenza $\boxed{n \leq \frac{-1+\sqrt{1+8P}}{2}}$ e ***n*** deve essere un divisore di **2*P***

Esempio

Trovare in quanti modi 325 può essere un numero poligonale

$$n \leq \frac{-1+\sqrt{1+8P}}{2} = \frac{-1+\sqrt{2601}}{2} = 25$$

Ma $2 \cdot 325 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 13$ e i soli possibili valori di n sono perciò 2, 5, 10, 13, 25 e quelli di a sono i seguenti:

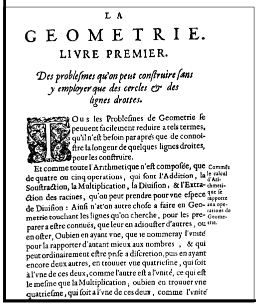
Lato	n	2	5	10	13	25
Numero di angoli	a	325	34	9	6	3

$T_{25} = \frac{25 \times 26}{2} = \frac{650}{2}$

$a = 2 + \frac{2(P-n)}{n(n-1)}$


DISCOURS
DE LA METHODE
Pour bien conduire sa raison, & chercher la verité dans les sciences.
PLUS
LA DIOPTRIQVE.
LES METEORES.
ET
LA GEOMETRIE.
Qui sont des essais de cete METHODE.
A LEYDE
De l'Imprimerie de IAN MAIRE.
Avec Privilege.

René Descartes
(1596-1650)


LA
GEOMETRIE.
LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres , & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

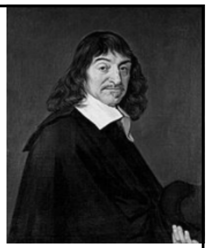
Commēt le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Padre della filosofia moderna.
Dallo studio del metodo matematico elaborò un metodo per giungere alla conoscenza.

È il creatore della geometria analitica

***Opere scientifiche di Réné Descartes*, Utet, 1983**

Progymnasmata de Solidorum Elementis excerpta ex Manuscripto Cartesii



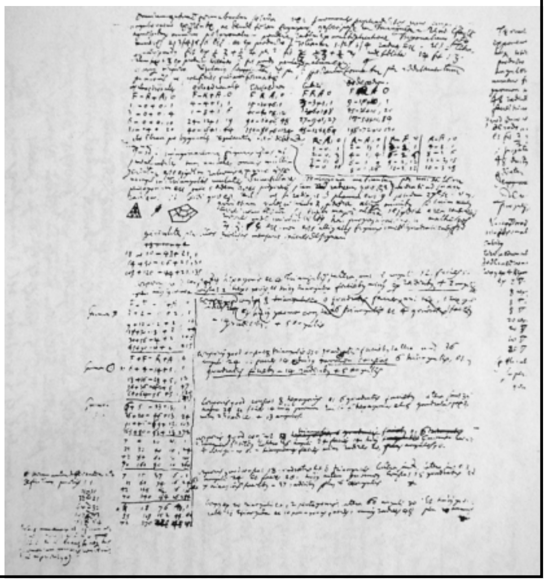
- ► 16.2.1650: Descartes muore a Stoccolma
- ► 1653 Chanut invia a Clerselier i manoscritti di Descartes
- ► 1676 G.W. Leibniz copia a Parigi il ms. di Descartes *De solidorum Elementis.* L'originale scompare.
- ► 1860 Foucher de Careil pubblica la copia di Leibniz del *De solidorum Elementis.* E. Prohuet lo traduce in francese.
- ► 1890 Seconda traduzione in francese a cura di E. de Jonquierès.
- ► 1908 Pubblicazione del *De solidorum Elementis* nel volume X (pp. 265-276, 1 Tav.) e XI (pp. 690-692) delle *Oeuvres* di Descartes.

Progymnasmata de Solidorum Elementis

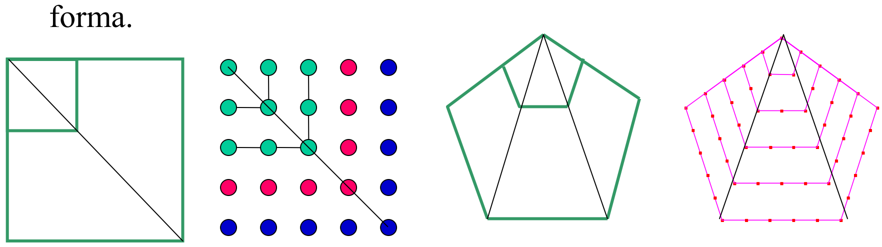
[*Oeuvres* di Descartes, X, pp. 265-276]

Parte Prima
- geometria dei poliedri
- $v - s + f = 2$
- altre relazioni numeriche fra vertici, spigoli e facce
- dimostrazione dell'esistenza di soli 5 poliedri regolari

Parte Seconda
- Numeri poligonali
- Numeri poliedrali
- Numeri figurati associati ai poliedri archimedei



Gnomone: ogni figura geometrica che può aggiungersi o togliersi a determinate figure, mantenendone inalterata la forma.



"I corpi solidi saranno formati, nel miglior modo possibile fra tutti, tramite gnomoni aggiunti in modo che vi sia sempre un angolo vuoto e che quindi la figura intera possa essere scomposta in triangoli" (p. 269)

“Di qui si deduce facilmente che i pesi di tutti i poligonali sono ottenuti dalla moltiplicazione dei numeri triangolari per i numeri 2, 3, 4, 5, 6 ecc. e togliendo dal prodotto 1, 2, 3, 4 ecc. radici” (p. 269)

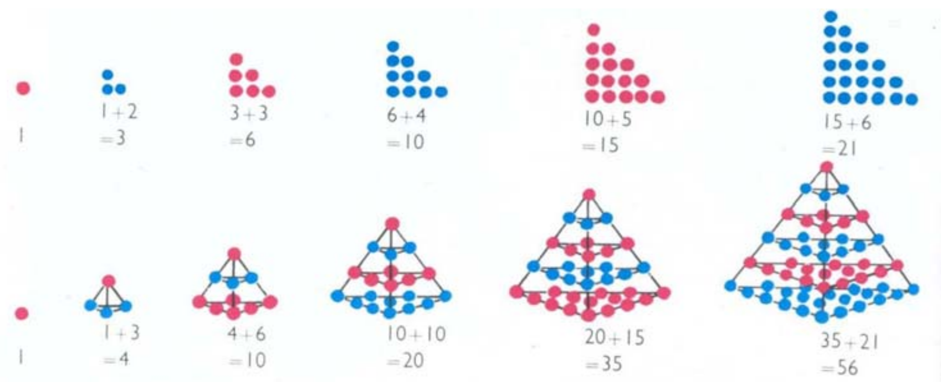
Nome		
Triangolare	1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 66 78 91 ...	$\frac{n^2+n}{2}$
Quadrato	1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144 169 ...	$2\cdot\frac{n^2+n}{2}-1\cdot n$
Pentagonale	1 5 12 22 35 51 70 92 117 145 176 210 247 ...	$3\cdot\frac{n^2+n}{2}-2\cdot n$
Esagonale	1 6 15 28 45 66 91 120 153 190 231 276 325 ...	$4\cdot\frac{n^2+n}{2}-3\cdot n$
Ottagonale	1 8 21 40 65 96 133 176 225 280 341 408 481 ...	
Decagonale	1 10 27 52 85 126 175 232 297 370 451 540 ...	

$$\boxed{F_p = (p-2)T_n - (p-3)n}$$

peso del numero figurato di p lati

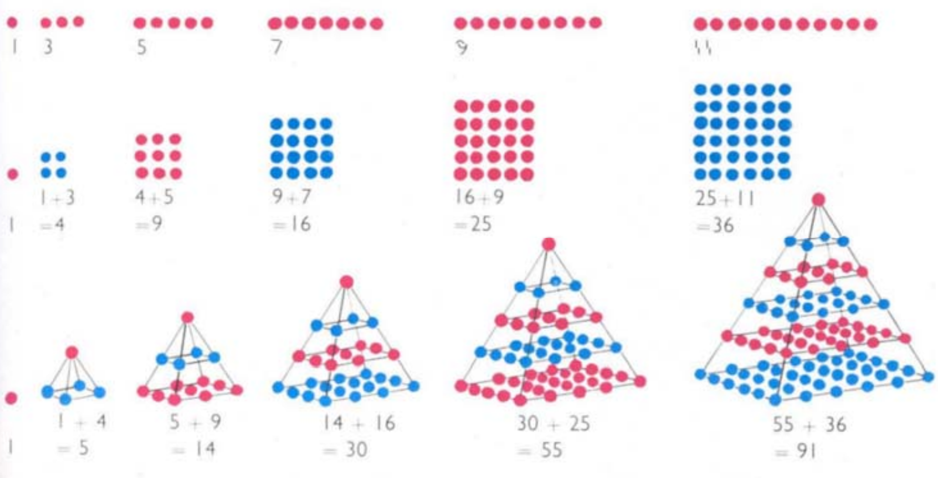
$$F_p = RT_n - An$$

Numeri tetraedrici



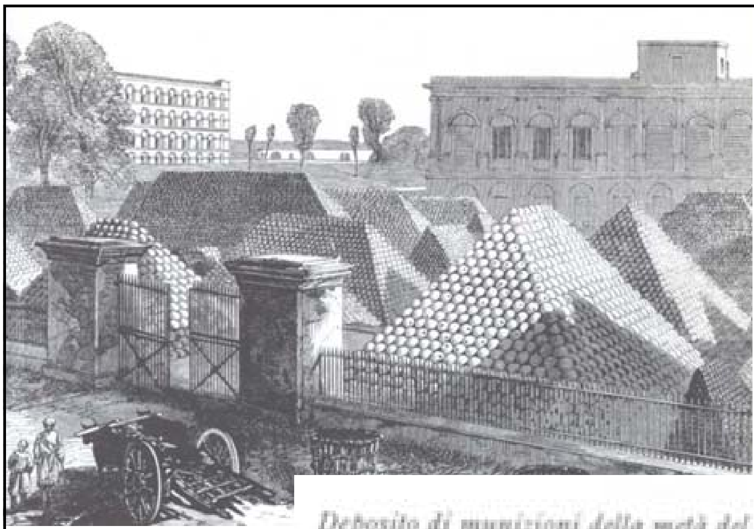
$$\sum_{r=1}^{r=n}\frac{r(r+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Numeri piramidali



$$\sum_{r=1}^{r=n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Somma dei primi *n* quadrati



Deposito di munizioni della metà del diciannovesimo secolo a Calcutta. I mucchi delle munizioni cominciarono ad esser fatti in forma di piramide (seconda da destra) prima del 1600. La conoscenza dei numeri piramidali rese facile il calcolo delle palle contenute in una piramide di altezza nota.

Dimostrare per induzione le due formule

$$\sum_{r=1}^{r=n} \frac{r(r+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\sum_{r=1}^{r=n} r^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pierre de Fermat (1601-1665)

Figlio di un mercante, compì studi giuridici a Tolosa, dove esercitò la professione fino al 1648 quando divenne consigliere del re.

Non fu quindi un matematico di professione, ma diede contributi rilevanti alla nascita dell'**analisi infinitesimale** e della **geometria analitica**. Fu l'iniziatore del **calcolo delle probabilità** e della **teoria dei numeri** vera e propria.

La maggior parte dei suoi risultati compaiono nelle **lettere** che scriveva agli amici o nei ***marginalia***. Pubblicò poco e alcuni dei suoi lavori apparvero solo dopo la morte. Sarà il maggiore dei suoi figli Samuel a divulgare le ricerche del padre.

DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
CVM COMMENTARIIS C. G. BACHETI V. C.
& obseruationibus D. P. de FERMAT Senatoris Tolosani.
Accessit Doctrinæ Analyticæ inuentum nouum, collectum
ex varijs eiusdem D. de FERMAT Epistolis.

TOLOSÆ,
Excudebat BERNARDVS BOSC, è Regione Collegij Societatis Iesu.
M. DC. LXX.

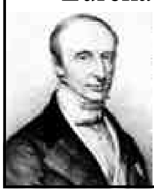
Nella sua formazione sono basilari l'*Aritmetica* di Diofanto e il commento di C.-G. Bachet de Méziriac, oltre ad una profonda conoscenza dell'aritmetica euclidea.

$x^n + y^n = z^n$
non ammette soluzioni intere positive diverse da 0 per $n \geq 3$

Il "teorema di Fermat" sarà dimostrato da Andrew Wiles solo nel 1994-95

P. Fermat [1636, *Oeuvres*, I, 305].
"Sono stato il primo a scoprire il teorema molto bello e generale che ogni numero [intero positivo] o è triangolare o è la somma di 2 o 3 numeri triangolari; ogni numero o è un quadrato o è la somma di 2, 3 o 4 quadrati … e così all'infinito… Non posso dare qui la dimostrazione che dipende da numerosi e astrusi misteri dei numeri, perché intendo dedicare un intero libro a questo argomento"
Ogni numero è la somma di al più **n** numeri ***n***-poligonali.

C.F. Gauss: lo dimostra nel caso dei numeri triangolari e annota il risultato nel suo diario nel modo seguente "Eureka Num = Δ+ Δ + Δ" (10.7.1796)



A.L. Cauchy: dimostra il teorema nella sua interezza
[1813-15, *Oeuvres*, (2), VI, 320-353].

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

"…prima ancora di andare a scuola ero affascinato dalla storia e dai poeti; avevo iniziato a interessarmi alla storia non appena imparai a leggere e i versi poetici mi procuravano molta gioia, ma quando incominciai a conoscere la logica, mi sentii molto compiaciuto per la ripartizione e l'ordine del pensiero che vi scoprivo dentro. Cominciai subito a notare che all'interno doveva esserci qualcosa di grande, per quanto sia possibile capire ad un ragazzo di 13 anni" (lettera a G. Wagner, fine 1696)

Storia, filosofia, diritto, linguistica, logica, teologia, matematica

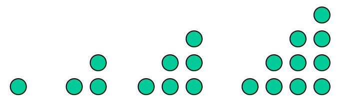
Il soggiorno parigino 1672-1676

È decisivo l'incontro con C. Huygens che gli consiglia letture matematiche (Pascal, Gregory, Descartes, Sluse, Wallis, …)
" Incitato da lui mi applicai a studiare la geometria più intricata sebbene all'epoca conoscessi solo gli Elementi di Euclide" (1680)
Leibniz stesso scrive che *"si svegliò dal letargo"*

Durante il soggiorno parigino L. perviene alla creazione del calcolo differenziale e integrale

Huygens lo mette alla prova proponendogli il seguente problema.

Trovare la somma dei reciproci dei numeri triangolari



1 3 6 10 …

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Triangolo aritmetico

1 1 1 1 1 1 1 1 1...
1 2 3 4 5 6 7 8...
1 3 6 10 15 21...
1 4 10 20 35...
1 5 15 35 70...
1 6 21 56 126...

$6 = a_{3,3} = 1+2+3$
$6 = 10 - 4$
$126 = a_{6,5} = 1+5+15+35+70$

Legame tra somme e differenze

$$a_{h,n} = \sum_{k=1}^{n} a_{h-1,k} \qquad a_{h,n} = a_{h+1,n} - a_{h+1,n-1}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \cdots$$
$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{42} \cdots$$
$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{105} \quad \cdots$$
$$\cdots$$

"quando egli [Leibniz] vide il Triangolo Aritmetico di Pascal costruì con lo stesso schema il suo triangolo armonico"
[*Historia et origo Calculi differentialis*, LMS, 5, pp. 404-406]

$$a_{h,n} = a_{h-1,n} - a_{h-1,n+1}$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}\cdots =$$
$$=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{4}-\frac{1}{5})+\ldots = 1$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}\quad\cdots =$$
$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{6})+(\frac{1}{6}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{12}-\frac{1}{20})+(\frac{1}{20}-\frac{1}{30})\ldots = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{T_n} = \frac{1}{n(n+1)/2} = 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

Somma dei reciproci dei numeri triangolari

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\ldots = 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots\right) = 2$$

"Ammetto di aver scoperto tutto questo metodo dalle considerazioni sulla ***reciprocità di somme e differenze*** *e che le mie considerazioni si estesero dalle successioni di numeri alle successioni di linee e ordinate"*

Fundamentum calculi: Differentiae et summae sibi reciprocae sunt

Series differentiae		***1***	***2***	***3***	***4***	***5***	***dx***
Series ipsa	***0***	***1***	***3***	***6***	***10***	***15***	***x***
Seriei summae	***0***	***1***	***4***	***10***	***20***	***35***	$\int x$

$$\int dx = x = d\int x$$

"la considerazione delle differenze e delle somme delle successioni numeriche mi aveva gettato la prima luce quando mi accorsi che le ***differenze corrispondono alle tangenti e le somme alle quadrature****"*

Lo studio dei numeri figurati è collegato a quel settore della teoria dei numeri chiamato **analisi diofantea.**

Trovare tutti i numeri che sono contemporaneamente quadrati e triangolari

L. Euler
(1707-1783)
Elemens d'Algèbre,
1774,
II.12.88

$T_n = n(n+1)/2$ $\qquad$ $Q_m = m^2$

$$\frac{1}{2}(n^2+n) = m^2$$
$$n^2+n = 2m^2$$
$$4n^2+4n+1 = 8m^2+1$$
$$(2n+1)^2 = 2(4m^2)+1$$

si ponga 2n+1 = x e 2m = y

$$x^2 = 2y^2+1$$

per x=17 e y=12 si ottengono i valori n=8 e m=6, cioè 36 che è contemporaneamente quadrato e triangolare.

$$x^2 = 2y^2 + 1$$

equazione di Pell-Fermat
poiché il coefficiente di y^2 non è un quadrato perfetto, l'equazione ammette infinite soluzioni, saranno dunque infiniti i numeri contemporaneamente quadrati e triangolari

$$\sqrt{2} = [1, \bar{2}] = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{1} \qquad \frac{p_2}{q_2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\frac{p_4}{q_4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{5}} = 1 + \frac{5}{12} = \frac{17}{12}$$

...

$x_1=3$, $y_1= 2$
$x_2=17$, $y_2= 12$
…

Olds, pp. 128-135

"I problemi, sia che si tratti di ***libera invenzione della ragione****, sia che nascano da* ***necessità di comprendere i più semplici fenomeni naturali****, costituiscono un ponte fra discipline diverse, sentieri che guidano in un labirinto di verità nascoste, garanti quindi dell'unità profonda della matematica"*

D. Hilbert, *Sur les problèmes futurs des mathématiques*, 1900

Bibliografia essenziale

DICKSON E., *History of the theory of numbers*, New York, Chelsea P.C., II, 1952

GARDNER M., *I numeri figurati e le loro insolite proprietà*, Le Scienze, 80, 1075

GIACARDI L., ROERO C.S., 2010, *La matematica delle civiltà arcaiche. Egitto, Mesopotamia, Grecia*, Università popolare, Torino, Cap. 4.

OLDS C.D. *Frazioni continue*, Zanichelli Bologna, 1968

PICUTTI E., *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano, 1977

Le Fonti

NICOMACO DI GERASA, *Introduction to Arithmetic*, New York, Macmillan Company, 1926

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*, Bruges, Desclée, De Brouwer,

ADAM CH., TANNERY P., *Oeuvres de Descartes*, 12 voll., Paris, 1 897-1913

TANNERY P., HENRY Ch., *Oeuvres de Fermat*, 4 voll, Paris, 1891-1912

LEIBNIZ G. W., *Historia et origo Calculi differentialis,* in *G.W. Leibniz Mathematische Schriften*, 5, pp. 404-406

EULER L. *Eléméns d'Algèbre,* Lyon 1774