

La nascita della probabilità nella corrispondenza tra Fermat e Pascal

A 15 ragazzi del secondo liceo scientifico ho posto la seguente questione:

Due giocatori, un frate e una donna, Fra Tac e Pamels¹, puntano la somma totale di 24 euro (posta) che si aggiudicherà chi di loro avrà raggiunto per primo il punteggio di 6 punti. Il gioco consiste nel lanciare una moneta perfettamente bilanciata: se esce testa Fra Tac vince il punto, mentre se esce croce il punto lo vince Pamels. Poiché il tempo è scaduto i giocatori devono interrompere il gioco quando Fra Tac ha vinto 5 partite e Pamels ne ha vinte 3. Come si deve dividere la posta in gioco tra i due contendenti?

Ho riunito i ragazzi in gruppi di due o tre e ho fatto mettere per iscritto la risposta, che secondo loro era fin troppo semplice.

Tutti i gruppi hanno infatti diviso la posta proporzionalmente ai punti conseguiti, assegnando 15 euro a fra Tac e 9 euro a Pamels.

Un ragazzo soltanto – dopo aver consegnato la risposta (uguale a quella di tutti gli altri) - ha osservato che, secondo lui, la divisione non era giusta: sarebbe stato più giusto assegnare un po' di più al giocatore con 5 punti. L'ho invitato a quantificare e lui mi ha risposto che avrebbe assegnato, in "via equitativa", 20 euro al primo e 4 al secondo. Sono rimasto colpito dalla risposta "soggettivista" del ragazzo e l'ho invitato a motivarla: mi ha semplicemente risposto che secondo lui sarebbe stato più giusto così, visto che il primo giocatore è molto più vicino alla vittoria dell'altro.

Nel consegnare la risposta hanno però tutti osservato che ci doveva "essere sotto qualcosa".

Ho allora chiesto:

"e se i due contendenti fossero stati, al momento dell'interruzione, sul punteggio di uno a zero?"

I ragazzi hanno osservato che non sarebbe giusto assegnare tutta la somma al primo contendente, in quanto anche il secondo ha delle possibilità di vittoria, anche se inferiori al primo.

Si tratta di misurare queste possibilità, valutare, in altre parole, la probabilità di vittoria di ogni giocatore.

Ho detto che storicamente si fa risalire alla risoluzione del cosiddetto problema delle parti (problem of points) la nascita del calcolo delle probabilità.

La prima formulazione che ci è nota è in un manoscritto di anonimo del '400, mentre la prima versione a stampa è di Pacioli nel '500.

La soluzione di Pacioli è la stessa che istintivamente hanno fornito i ragazzi.

Ho invitato i ragazzi a ripensare all'argomento e a formulare nuove soluzioni.

Un gruppo ha detto: il gioco si svolge al meglio delle 11 partite, nel senso che al massimo si possono svolgere 11 partite prima che un giocatore abbia totalizzato 6 punti: al primo giocatore andranno i 5/11 della posta perché ha totalizzato 5 punti su 11, al secondo andranno i 3/11 per lo stesso motivo, e i restanti 3/11 vanno divisi a metà.

¹ anagramma di Fermat e Pascal

Un altro gruppo ha fatto un notevole passo avanti, osservando che non contano i punti fatti, ma i punti mancanti. Hanno proposto di dividere la posta in parti inversamente proporzionali ai punti mancanti alla vittoria, assegnando così $\frac{1}{4}$ della posta al giocatore che si trova a 3 punti e $\frac{3}{4}$ della posta a quello che si trova a 5.

Un altro gruppo ha infine osservato che, non essendo la partita conclusa e avendo ancora entrambi i giocatori la possibilità di vincere, la scommessa fatta non ha più valore e quindi ognuno dei due giocatori deve riprendersi quanto ha puntato.

È interessante notare come i ragazzi abbiano ripercorso un po' tutte le soluzioni che sono state date nella storia, prima della definitiva risoluzione del problema data da Fermat e Pascal.

A questo punto abbiamo letto insieme il testo delle lettere che Pascal e Fermat si sono scambiati sull'argomento. Poiché non mi risulta che esista una traduzione in italiano del carteggio, abbiamo letto una versione in inglese e l'abbiamo tradotta in italiano. Riporto di seguito sia il testo in inglese sia la traduzione in italiano. Per alcuni passi riporto la traduzione che ho trovato nel libro di Devlin K. – *La lettera di Pascal*. Poiché il testo in questione non traduce tutti i passi che ci interessano, per gli altri passi riporto la traduzione dei ragazzi.

Soluzione di Pascal

La prima soluzione completa a noi giunta del problema delle parti è contenuta nella lettera di Pascal a Fermat del 29/07/1654.

Pascal, in risposta ad una lettera di Fermat andata perduta, afferma di ammirare la soluzione del problema precedentemente inviategli da Fermat ma, poiché "il metodo delle combinazioni è faticoso", ne propone un altro iterativo.

Pascal si pone nell'ipotesi che si trovino sul punteggio di 2 a 1 e si debba arrivare a 3 per aggiudicarsi la posta di 64 *pistole*.

... Your method is very sound and it is the first one that came to my mind in these researches, but because the trouble of these combinations was excessive, I found an abridgment and indeed another method that is much shorter and more neat, which I should like to tell you here in a few words; for I should like to open my heart to you henceforth if I may, so great is the pleasure I have had in our agreement. I plainly see that the truth is the same at Toulouse and at Paris.

This is the way I go about it to know the value of each of the shares when two gamblers play, for example, in three throws, and when each has put 32 pistoles at stake:

Let us suppose that the first of them has two (points) and the other one. They now play one throw of which the chances are such that if the first wins, he will win the entire wager that is at stake, that is to say 64 pistoles. If the other wins, they will be two to two and in consequence, if they wish to separate, it follows that each will take back his wager that is to say 32 pistoles.

Consider then, Monsieur, that if the first wins, 64 will belong to him. If he loses, 32 will belong to him. Then if they do not wish to play this point, and separate without doing it, the first should say "I am sure of 32 pistoles, for even a loss gives them to me.

As for the 32 others, perhaps I will have them and perhaps you will have them, the risk is equal. Therefore let us divide the 32 pistoles in half, and give me the 32 of which I am certain besides." He will then have 48 pistoles and the other will have 16.

TRADUZIONE²:

... Il vostro metodo è molto valido ed è il primo che mi venne in mente in queste ricerche, ma perché la fatica delle combinazioni era eccessiva, ho trovato una riduzione e esattamente un altro metodo che è molto più breve e più pulito, che mi piacerebbe esporvi qui in poche parole; perché io vorrei aprire il mio cuore a voi d'ora in poi se mi è consentito, tanto grande è il piacere che ho avuto nel nostro essere d'accordo. Io chiaramente vedo che la verità è la stessa a Tolosa e a Parigi.

Questo è il mio modo di trovare il valore di ciascuna delle parti quando due giocatori giocano, per esempio, in tre mani, e quando ognuno ha messo 32 pistole in gioco:

Supponiamo che il primo di essi abbia due (punti) e l'altro uno. Essi ora giocano una mano in cui le possibilità sono tali che, se il primo vincesse, vincerebbe la posta intera che è in gioco, vale a dire 64 pistole. Se vincesse l'altro, sarebbero 2-2 e, di conseguenza, se vogliono separarsi, ne consegue che ognuno riprenderà la sua posta, vale a dire 32 pistole.

Considerate allora, signore, che se il primo vincesse, 64 pistole apparterrebbero a lui. Se perdesse, ne avrebbe 32. Quindi se a questo punto non desiderano giocare, e vogliono separarsi senza farlo, il primo dovrebbe dire: "Sono certo di 32 pistole, perché le avrei anche se perdessi.

Per quanto riguarda le altre 32, forse li avrò io e forse li avrai tu, le possibilità sono uguali. Quindi dividiamo le 32 pistole a metà, e dammi le 32 di cui sono certo. "Egli allora avrà 48 pistole e l'altro ne avrà 16.

Pascal suppone adesso che lo stesso gioco venga interrotto sul punteggio di 2 a 0 anziché 2 a 1

Now let us suppose that the first has two points and the other *none*, and that they are beginning to play for a point. The chances are such that if the first wins, he will win all of the wager, 64 pistoles. If the other wins, behold they have come back to the preceding case in which the first has two points and the other *one*.

But we have already shown that in this case 48 pistoles will belong to the one who has two points. Therefore if they do not wish to play this point, he should say, "If I win, I shall gain all, that is 64. If I lose, 48 will legitimately belong to me. Therefore give me the 48 that are certain to be mine, even if I lose, and let us divide the other 16 in half because there is as much chance that you will gain them as that I will." Thus he will have 48 and 8, which is 56 pistoles.

TRADUZIONE³:

Ora supponiamo che il primo abbia due punti e l'altro nessuno, e che stiano per cominciare una nuova mano. Le possibilità sono tali che, se il primo vincesse, vincerebbe l'intera posta di 64 pistole. Se vincesse l'altro, ecco, essi tornerebbero al caso precedente in cui il primo ha due punti e l'altro uno.

Ma abbiamo già dimostrato che in questo caso 48 pistole apparterrebbero a colui che ha due punti. Pertanto, se non desiderano giocare a questo punto, egli dovrebbe dire: "Se vincessi, guadagnerei tutto, cioè 64 [pistole]. Se perdessi, 48 [pistole] sarebbero legittimamente mie. Pertanto dammi le 48 che sono mie di certo, anche se perdessi, e dividiamoci le altre 16 a metà perché vi sono le stesse probabilità che le guadagni tu o io." Così egli avrà 48 più 8, che sono 56 pistole.

² Traduzione dei ragazzi

³ Traduzione dei ragazzi

Pascal suppone infine che lo stesso gioco venga interrotto sul punteggio di 1 a 0 anziché 2 a 0

Let us now suppose that the first has but *one* point and the other *none*. You see, Monsieur, that if they begin a new throw, the chances are such that if the first wins, he will have *two* points to *none*, and dividing by the preceding case, 56 will belong to him. If he loses, they will be point for point, and 32 pistoles will belong to him. He should therefore say, "If you do not wish to play, give me the 32 pistoles of which I am certain, and let us divide the rest of the 56 in half. From 56 take 32, and 24 remains. Then divide 24 in half, you take 12 and I take 12 which with 32 will make 44.

TRADUZIONE:⁴

Supponiamo ora che il primo abbia un solo punto e l'altro nessuno. Vedete, Monsieur, che se si giocasse una nuova mano, le possibilità sono tali che, in caso di vittoria del primo, egli sarebbe sul due a zero, e dividendo come nel caso precedente, 56 [pistole] apparterrebbero a lui. In caso di sconfitta, essi sarebbero sull'1 a 1, ed egli avrebbe diritto a 32 pistole. Pertanto, dovrebbe dire: "Se non vuoi giocare, dammi le 32 pistole di cui sono certo, e dividiamo quello che resta dalle 56 a metà. Da 56 sottraiamo 32, e ne restano 24.

Abbiamo, con i ragazzi, applicato la soluzione di Pascal al nostro problema, supponendo dapprima che i giocatori si trovino sul punteggio di 5 a 4. Senza difficoltà i ragazzi hanno concluso che:

il giocatore in vantaggio potrebbe dire: "Se giocassimo il prossimo punto potrei vincere o perdere. Se vincessi mi aggiudicherei l'intera posta di 24 euro, se perdessi saremmo in parità e avrei diritto alla metà della posta: 12 euro. Datemi dunque 12 euro di cui sono sicuro e dividiamo a metà gli altri 12: in totale ho diritto a 18 euro.

Abbiamo poi esaminiamo la situazione posta inizialmente di 5 a 3. I ragazzi hanno concluso che:

il giocatore in vantaggio potrebbe dire: "Se giocassimo il prossimo punto potrei vincere o perdere. Se vincessi mi aggiudicherei l'intera posta di 24 euro, se perdessi saremmo sul punteggio di 5 a 4 esaminato precedentemente e avrei diritto a 18 euro. Datemi dunque 18 euro di cui sono sicuro e dividiamo a metà gli altri 6: in totale ho diritto a 21 euro.

Soluzione di Fermat

A questo punto abbiamo esaminato la soluzione di Fermat esposta nella lettera di Pascal a Fermat del 24/08/1654.

Pascal espone la soluzione di Fermat nel caso in cui al primo giocatore manchino 2 punti alla vittoria e al secondo giocatore ne manchino 3.

Siccome la partita si concluderà al massimo in altre 4 giocate, Pascal scrive in perfetto ordine lessicografico una tabella con tutti i possibili svolgimenti delle successive 4 partite, che sono in numero di 16 (risultato di 2^4 e non di 4^2 come afferma Pascal).

⁴ Traduzione dei ragazzi

Nella tabella viene indicata con a la conquista di un punto da parte del primo giocatore e con b del secondo. Un "1" indica che la vittoria finale va al primo giocatore e un "2" al secondo.

This is the method of procedure when there are two players. If two players, playing in several throws, find themselves in such a state that the first lacks two points and the second three of gaining the stake, you say it is necessary to see in how many points the game will be absolutely decided.

It is convenient to suppose that this will be in four points, from which you conclude that it is necessary to see how many ways the four points may be distributed between the two players and to see how many combinations there are to make the first win and how many to make the second win, and to divide the stake according to that proportion.

I could scarcely understand this reasoning if I had not known it myself before; but you also have written it in your discussion. Then to see how many ways four points may be distributed between two players, it is necessary to imagine that they play with dice with two faces (since there are but two players), as heads and tails, and that they throw four of these dice (because they play in four throws). Now it is necessary to see how many ways these dice may fall. That is easy to calculate. There can be *sixteen*, which is the second power of *four*; that is to say, the square. Now imagine that one of the faces is marked a , favorable to the first player. And suppose the other is marked b , favorable to the second. Then these four dice can fall according to one of these sixteen arrangements.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | b | b | b | b | b |
| a | a | a | a | b | b | b | b | a | a | a | a | b | b | b | b |
| a | a | b | b | a | a | b | b | a | a | b | b | a | a | b | b |
| a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |

and, because the first player lacks two points, all the arrangements that have two a 's make him win. There are therefore 11 of these for him. And because the second lacks three points, all the arrangements that have three b 's make him win. There are 5 of these. Therefore it is necessary that they divide the wager as 11 is to 5.

There is your method, when there are two players, whereupon you say that if there are more players. it will not be difficult to make the division by this method.

TRADUZIONE⁵:

Ecco il modo in cui procedere quando ci sono due giocatori. Se, in una partita di più mani, due giocatori si ritrovano in una situazione tale che, per vincere la posta, al primo di loro mancano due punti e al secondo tre, voi dite che occorre vedere dopo quante mani l'esito del gioco verrà definitivamente deciso.

Per convenienza possiamo supporre che ciò accadrà dopo quattro mani, cosa da cui concludete che è necessario vedere in quanti modi questi quattro punti possono essere distribuiti fra i due giocatori, calcolare quante combinazioni portano alla vincita del primo e quante a quella del secondo e, quindi, dividere la posta in accordo con questa proporzione. Se non fossi già stato a conoscenza di questo ragionamento, sarei riuscito a malapena a intenderlo; ma anche voi l'avete scritto nella vostra esposizione. Quindi, per vedere in quanti modi i quattro punti possono essere distribuiti fra due giocatori, dobbiamo immaginare che essi giochino con un dado a due facce (dato che ci sono soltanto due giocatori), come se gareggiassero a testa o croce, e che lancino quattro di questi dadi (dato che devono giocare ancora quattro mani). Ora, dobbiamo vedere in quanti modi differenti questi dadi possono fermarsi. È una cosa facile da calcolare. Ce ne possono essere sedici, ossia quattro alla seconda o, in altri termini, al quadrato. Adesso supponiamo che una delle facce sia contrassegnata con una a (l'esito favorevole al primo giocatore) e l'altra con una b (favorevole al secondo). Dunque, i quattro dadi possono fermarsi in una di queste sedici combinazioni:

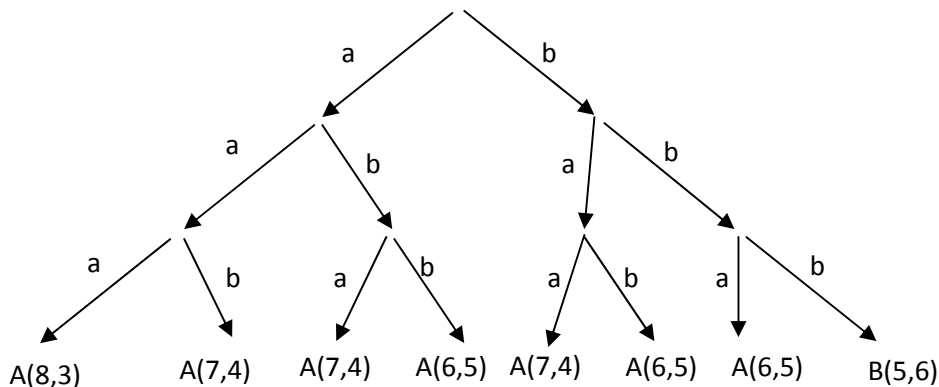
⁵ Traduzione di Devlin K. – *La lettera di Pascal*, Rizzoli, Milano, 2008.

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | b | b | b | b | b |
| a | a | a | a | b | b | b | b | a | a | a | a | b | b | b | b |
| a | a | b | b | a | a | b | b | a | a | b | b | a | a | b | b |
| a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b | a | b |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 2 | 2 |

E, poiché al primo giocatore mancano due punti, tutte le combinazioni che contengono almeno due a – ce ne sono complessivamente 11 – lo portano alla vittoria; e dato che al secondo giocatore mancano tre punti, tutte le combinazioni che contengono tre b – ce ne sono complessivamente 5 – lo fanno vincere. Pertanto, essi dovranno spartirsi la somma in un rapporto di 11 a 5.

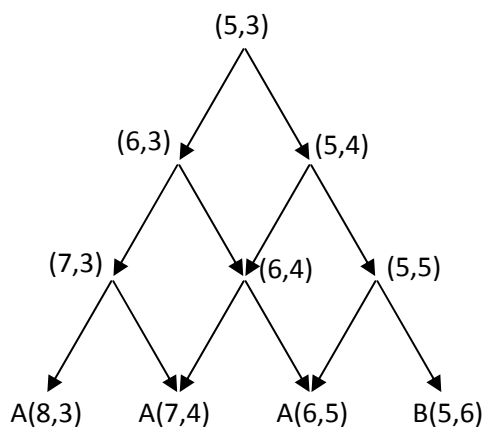
Ecco il vostro metodo nel caso in cui ci siano due giocatori. Dopodiché voi dite che, qualora i giocatori siano in maggior numero, la spartizione potrà essere fatta senza difficoltà procedendo in questo medesimo modo.

Abbiamo applicato la soluzione di Fermat al nostro problema in cui i giocatori si trovano sul punteggio di 5 a 3; il gioco finirà certamente entro 3 partite. Abbiamo ipotizzato lo svolgimento con un diagramma ad albero.

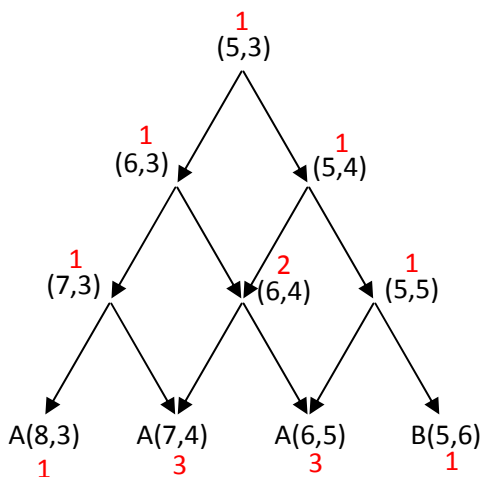


Nel diagramma il punto finale riporta la lettera A se la vittoria finale è del primo giocatore, la lettera B se è del secondo. Le “coordinate” tra parentesi indicano il punteggio finale.

In onore a Pascal abbiamo usato il triangolo di Pascal (a noi noto come triangolo di Tartaglia) per risolvere il problema. Partendo dalla situazione di 5 a 3 si percorre un tratto a sinistra in caso di vittoria di A o un tratto a destra in caso di vittoria di B. Dopo tre partite la situazione è la seguente.



Ma in quanti modi si può arrivare ad ognuno dei punti finali? Poiché per giungere ad ogni punteggio si può provenire solo dai due punteggi immediatamente superiori, il numero di percorsi si ottiene con lo stesso metodo di costruzione del triangolo di Pascal. Scriviamo in rosso il numero di percorsi.



I tre punteggi finali contrassegnati con la A, corrispondenti alla vittoria del primo giocatore, si ottengono in $1+3+3+1$ modi, mentre il punteggio finale contrassegnato con B (vittoria del secondo giocatore), si ottiene in un solo modo; dunque la posta andrà per i $7/8$ al primo giocatore e $1/8$ al secondo, corrispondenti rispettivamente a 21 e 3 pistole.

L'obiezione di Roberval

La "finzione matematica" adottata da Fermat di svolgere sempre e comunque il numero di partite prefissato necessario alla conclusione del gioco non fu all'inizio accettato da Pascal; egli, infatti, nella stessa lettera riporta un'obiezione di Roberval: secondo quest'ultimo è indifferente svolgere o meno tutte le partite prefissate nel caso di due giocatori, ma non lo è nel caso di tre.

Supponiamo che a giocare siano in tre e che per la vittoria al primo manchi 1 punto, al secondo 2 e al terzo 2. Il gioco si concluderà certamente dopo al massimo 3 partite, ma svolgendole comunque tutte e 3 può accadere che vi siano due vincitori.

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | b | b | b | b | b | b | c | c | c | c | c | c | c | c | c |
| a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | a | a | b | b | b | c | c | c | c |
| a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | | | | | 2 | | | | | | | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | | | 2 | | | | | |
| | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | 3 | | | 3 | | | | 3 | 3 | 3 | |

Dividendo la posta a metà nel caso in cui ci siano due vincitori, si ottiene la divisione in parti proporzionali ai numeri $16, 5 \frac{1}{2}, 5 \frac{1}{2}$, mentre quella giusta è proporzionale ai numeri $17, 5, 5$.

... I communicated your method to [some of] our gentlemen, on which M. de Roberval made me this objection:

That it is wrong to base the method of division on the supposition that they are playing in *four* throws seeing that when one lacks *two* points and the other *three*, there is no necessity that they play *four* throws since it may happen that they play but *two* or *three*, or in truth perhaps *four*.

Since he does not see why one should pretend to make a just division on the assumed condition that one plays *four* throws, in view of the fact that the natural terms of the game are that they do not throw the dice after one of the players has won; and that at least if this is not false, it should be proved. Consequently he suspects that we have committed a paralogism.

I replied to him that I did not find my reasoning so much on this method of combinations, which in truth is not in place on this occasion, as on my universal method from which nothing escapes and which carries its proof with itself. This finds precisely the same division as does the method of combinations. Furthermore, I showed him the truth of the divisions between two players by combinations in this way. Is it not true that if two gamblers finding according to the conditions of the hypothesis that one lacks two points and the other three, mutually agree that they shall play four complete plays, that is to say, that they shall throw four two-faced dice all at once,—is it not true, I say, that if they are prevented from playing the four throws, the division should be as we have said according to the combinations favorable to each? He agreed with this and this is indeed proved. But he denied that the same thing follows when they are not

obliged to play the four throws. I therefore replied as follows:

It is not clear that the same gamblers, not being constrained to play the four throws, but wishing to quit the game before one of them has attained his score, can without loss or gain be obliged to play the whole four plays, and that this agreement in no way changes their condition? For if the first gains the two first points of four. will he who has won refuse to play two throws more, seeing that if he wins he will not win more and if he loses he will not win less? For the two points which the other wins are not sufficient for him since he lacks three, and there are not enough [points] in four throws for each to make the number which he lacks.

It certainly is convenient to consider that it is absolutely equal and indifferent to each whether they play in the natural way of the game, which is to finish as soon as one has his score, or whether they play the entire four throws. Therefore, since these two conditions are equal and indifferent, the division should be alike for each. But since it is just when they are obliged to play the four throws as I have shown, it is therefore just also in the other case.

That is the way I prove it, and, as you recollect, this proof is based on the equality of the two conditions true and assumed in regard to the two gamblers, the division is the same in each of the methods, and if one gains or loses by one method, he will gain or lose by the other, and the two will always have the same accounting.

Let us follow the same argument for three players and let us assume that the first lacks one point, the second two, and the third two. To make the division, following the same method of combinations, it is necessary to first discover in how many points the game may be decided as we did when there were two players. This will be in three points for they cannot play three throws without necessarily arriving at a decision.

It is now necessary to see how many ways three throws may be combined among three players and how many are favorable to the first, how many to the second, and how many to the third, and to follow this proportion in distributing the wager as we did in the hypothesis of the two gamblers.

It is easy to see how many combinations there are in all. This is the third power of 3; that is to say, its cube, or 27. For if one throws three dice at a time (for it is necessary to throw three times), these dice having three faces each (since there are three players), one marked a favorable to the first, one marked b favorable to the second, and one marked c favorable to the third,—it is evident that these three dice thrown together can fall in 27 different ways as:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | b | b | b | b | b | b | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | | |
| a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | a | a | b | b | b | c | c | c | c | | |
| a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | | | | 2 | | | | | | 2 | | 2 | 2 | 2 | | 2 | | | | | | | | | 2 | | | | |
| | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | 3 | | 3 | 3 | 3 |

Since the first lacks but one point, then all the ways in which there is one a are favorable to him. There are 19 of these. The second lacks two points. Thus all the arrangements in which there are two b's are in his favor. There are 7 of them. The third lacks two points. Thus all the arrangements in which there are two c's are favorable to him. There are 7 of these.

If we conclude from this that it is necessary to give each according to the proportion 19, 7, 7, we are making a serious mistake and I would hesitate to believe that you would do this. There are several cases favorable to both the first and the second, as abb has the a which the first needs, and the two b's which the second needs. So too, the acc is favorable to the first and third. It therefore is not desirable to count the arrangements which are common to the two as being worth the whole wager to each, but only as being half a point. For if the arrangement acc occurs, the first and third will have the same right to the wager, each making their score. They should therefore divide the wager in half. If the arrangement aab occurs, the first alone wins. It is necessary to make this assumption.

There are 13 arrangements which give the entire wager to the first, and 6 which give him half and 8 which are worth nothing to him. Therefore if the entire sum is one pistole, there are 13 arrangements which are each worth one pistole to him, there are 6 that are each worth $\frac{1}{2}$ pistole, and 8 that are worth nothing. Then in this case of division, it is necessary to multiply

| | | | |
|-------|-------|----------------------------|----|
| | 13 | by one pistole which makes | 13 |
| | 6 | by one half which makes | 3 |
| | 8 | by zero which makes | 0 |
| Total | ----- | Total | 16 |

and to divide the sum of the values 16 by the sum of the arrangements 27, which makes the fraction $\frac{16}{27}$ and it is this amount which belongs to the first gambler in the event of a division; that is to say, 16 pistoles out of 27.

The shares of the second and the third gamblers will be the same: [...].

Therefore $5\frac{1}{2}$ pistoles belong to the second player out of 27, and the same to the third. The sum of the $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$, and 16 makes 27.

It seems to me that this is the way in which it is necessary to make the division by combinations according to your method, unless you have something else on the subject which I do not know. But if I am not mistaken, this division is unjust....

TRADUZIONE⁶:

Ho esposto il vostro metodo ad altri gentiluomini come noi, uno dei quali, monsieur de Roberval, mi ha mosso la seguente obiezione.

È sbagliato basare il metodo di spartizione sulla supposizione che i giocatori debbano per forza disputare quattro mani, dato che vediamo che, quando a uno di loro mancano due punti e all'altro tre, non c'è necessità che giochino tutte e quattro le mani. Può accadere che ne giochino soltanto due o tre, o che forse arrivino veramente a quattro

Egli non vede il motivo per cui si debba avere la pretesa di fare una spartizione equa basandosi sul presupposto che si giochi per quattro mani, in vista del fatto che il termine naturale del gioco prevede che si smetta di lanciare il dado dopo che uno dei partecipanti ha vinto; e ritiene che, anche ammettendo che questo presupposto non sia falso, esso andrebbe perlomeno dimostrato. Di conseguenza, egli sospetta che abbiamo commesso un paralogismo⁷.

Io gli [a monsieur de Roberval] ho risposto che il mio ragionamento non è basato tanto su questo metodo delle combinazioni che, in verità, in tale occasione è fuori luogo, quanto piuttosto sul mio metodo universale, dal quale non sfugge nulla e che porta con sé la dimostrazione. Questo metodo giunge alla stessa precisa divisione che si ottiene con quello delle combinazioni. Inoltre, gli ho già mostrato la validità delle spartizioni tra due giocatori stabilite tramite il metodo delle combinazioni. Non è forse vero che se due giocatori, vedendo che – secondo le condizioni delle nostre ipotesi – a uno di loro mancano due punti e all'altro tre, si accordano per giocare tutte e quattro le mani rimanenti (ossia, per lanciare insieme quattro dadi a due facce), non è forse vero, dicevo, che se qualcosa impedisce loro di fare i quattro lanci, la spartizione dovrebbe avvenire, come abbiamo detto, in accordo con le combinazioni favorevoli a ciascuno dei due? Egli si è detto d'accordo con me su questo punto, che può di fatto considerarsi dimostrato. Tuttavia, ha negato che la stessa cosa valga anche quando i giocatori non sono obbligati a fare i quattro lanci. Gli ho quindi risposto in questi termini.

⁶ Traduzione in Devlin K. – *La lettera di Pascal*, Rizzoli, Milano, 2008.

⁷ Il termine "paralogismo" indica un ragionamento o una conclusione illogica o fallace. Deriva dal latino *paralogismus*, che riprende a sua volta il greco *paralogismos* da *paralogos*, ossia "irragionevole", "al di là (=para) della logica"

Non è forse chiaro che gli stessi giocatori, che ora non sono costretti a fare i quattro lanci, ma vogliono terminare la partita prima che uno di loro abbia ottenuto il punteggio pieno, potrebbero, senza che vi siano perdite o guadagni, essere obbligati a giocare tutte e quattro le mani, e che questo accordo non cambierebbe in alcun modo la loro condizione? Infatti, se il primo giocatore vince i primi due dei quattro punti in gioco, colui che ha vinto si rifiuterà forse di fare altri due tiri, vedendo che se vince i primi due dei quattro punti in gioco, colui che ha vinto si rifiuterà forse di fare altri due tiri, vedendo che se vince queste altre due mani non vincerà di più di quanto abbia già fatto e che se le perde avrà nondimeno vinto? In quest'ultimo caso, infatti, i due punti vinti dal secondo giocatore non gli sarebbero comunque sufficienti per ottenere la vittoria finale, dato che gliene mancano tre, e in quattro lanci non gli sarebbero comunque sufficienti per ottenere la vittoria finale, dato che gliene mancano tre, e in quattro lanci non ci sono abbastanza punti perché ciascuno dei due partecipanti possa ottenere quelli che gli mancano.

È certamente opportuno considerare che è assolutamente uguale e indifferente per ciascuno dei due gareggiare seguendo la condizione naturale del gioco, cioè finire non appena uno di loro raggiunge il punteggio che gli serve per vincere la partita, oppure fare tutti e quattro i lanci. Pertanto, dato che queste due condizioni sono uguali e indifferenti, la spartizione della posta dovrebbe essere la stessa in entrambi i casi. Ma visto che quando sono obbligati a giocare tutte e quattro le mani è giusto dividere la posta nel modo che ho indicato, ne segue che è giusto dividerla in questo stesso modo anche nell'altro caso.

È così che l'ho dimostrato; e, come sapete, questa dimostrazione si basa sull'uguaglianza delle due condizioni, quella naturale e quella assunta riguardo ai due giocatori; la spartizione della posta è la stessa in entrambi i metodi e, se un giocatore vince o perde secondo un metodo, vincerà o perderà anche secondo l'altro, e il risultato ottenuto dai due sarà comunque sempre il medesimo.

Applichiamo ora il medesimo ragionamento a tre giocatori e assumiamo che al primo manchi un punto, al secondo due e al terzo due. Per fare la spartizione seguendo lo stesso metodo delle combinazioni, è necessario innanzitutto scoprire in quante mani la partita risulterà decisa, così come abbiamo fatto quando c'erano due giocatori. Essa sarà decisa in tre mani, dato che è impossibile che i partecipanti disputino tre mani senza che ne esca necessariamente il vincitore.

Occorre ora vedere in quanti modi tre lanci possono essere combinati fra tre giocatori, e quanti di questi lanci sono favorevoli al primo, quanti al secondo e quanti al terzo, per poi seguire questa medesima proporzione nel distribuire la posta, come abbiamo fatto nell'ipotesi dei due giocatori.

È facile vedere quante combinazioni ci sono in tutto. Il numero che cerchiamo è 3 alla terza potenza, ossia 3 al cubo, cioè 27. Infatti, se si lanciano insieme tre dadi (dato che è necessario lanciare ognuno di essi tre volte), e questi dadi hanno tre facce ciascuno (dato che ci sono tre giocatori), una marcata con una a (l'esito favorevole al primo giocatore), l'altra con una b (favorevole al secondo) e l'altra con una c (favorevole al terzo), è evidente che questi tre dadi lanciati assieme possono fermarsi in 27 modi differenti, e cioè:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|
| a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | a | b | b | b | b | b | b | b | b | b | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | c | | | |
| a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | a | a | b | b | b | c | c | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | |
| a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | a | b | c | |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | | | | | 2 | | | | | | 2 | | | 2 | 2 | 2 | 2 | | | | | | | | | | | | 2 | | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | 3 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

Dato che al primo manca soltanto un punto, ne segue che tutti gli esiti in cui c'è almeno una a sono a lui favorevoli. Ce ne sono 19. Al secondo mancano due punti, così che tutti gli esiti in cui ci sono almeno due b sono a suo favore. Ce ne sono 7. Al terzo mancano due punti, pertanto tutti gli esiti in cui compaiono almeno due c sono a lui favorevoli. Ce ne sono 7. Se da questo concludiamo che è necessario spartire la posta dando a ciascuno secondo il rapporto di 19-7-7, stiamo però commettendo un grave errore, ed esito a credere che voi lo fareste. Ci sono infatti diversi casi favorevoli sia al primo sia al secondo, come abb, dove ci sono sia la a che manca al primo, sia le due b che servono al secondo. Allo stesso modo, il risultato acc è favorevole al primo e al terzo.

I risultati che portano alla vittoria di due giocatori non dovrebbero quindi essere contati come esiti che valgono l'intera posta in gioco, ma soltanto la metà di essa. Infatti, se si verifica l'esito acc, il primo e il terzo avranno il medesimo diritto alla somma, dato che ognuno ha raggiunto il punteggio che gli serve. Di conseguenza, dovrebbero dividersi la posta a metà. Ma se esce il risultato aab, vince soltanto il primo. È necessario fare questa assunzione.

Ci sono 13 esiti che assegnano l'intera posta al primo, 6 che gliene danno la metà e 8 che non gli danno nulla. Pertanto, se l'intera somma ammonta a una pistola, ci sono 13 esiti che gli assegnano una pistola, 6 che gliene fruttano mezza e 8 che non gli portano nulla.

Quindi, in questo caso di spartizione, dobbiamo moltiplicare

| | | |
|--------|-------------------------|-----------|
| 13 | per una pistola, che fa | 13 |
| 6 | per mezza, che fa | 3 |
| 8 | per zero, che fa | 0 |
| Totale | 27 | Totale 16 |

e dividere la posta dei valori, cioè 16, per la somma degli esiti possibili, cioè 27, ottenendo così la frazione $16/27$. Questa sarà quindi la parte della posta che dovrà andare al primo giocatore nel caso di una spartizione: 16 pistole su 27. Al secondo e al terzo giocatore andranno due quote identiche: [...].

Pertanto, al secondo giocatore andranno cinque pistole e mezza su ventisette, e lo stesso al terzo. E la somma di $5\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{2}$ e 16 fa appunto 27.

Mi sembra che questo sia il modo in cui è necessario fare la spartizione seguendo il vostro metodo delle combinazioni, a meno che su questo argomento non ci sia qualche altro elemento di cui non sono ancora a conoscenza. Ma, se non mi sbaglio, questa spartizione non è giusta...

Ho chiesto ai ragazzi cosa ne pensassero dell'obiezione di Roberval. Hanno tutti risposto che non è valida. Tutto quello che si fa dopo che un giocatore ha raggiunto la vittoria non conta: se si gioca, a quel punto, lo si fa solo per divertimento. Un ragazzo ha affermato che la situazione è analoga a quella del calciobalilla: si deve arrivare a 6 per vincere (ci sono infatti 11 palline nel biliardino); se una delle due squadre arriva a 6 e avanzano altre palline, si gioca lo stesso; quello che accade, da quel punto in poi, non ha alcuna importanza, nemmeno per alleviare la sconfitta. Se una squadra ha subito "cappotto" (così viene chiamata la sconfitta per 6 a 0), il "cappotto" rimane anche se gli sconfitti vincessero i successivi 5 punti.

La risposta di Fermat

Nella lettera a Pascal del 29/08/1654 Fermat difende la sua "finzione matematica", affermando che tutto ciò che avviene dopo la vittoria di un giocatore non ha alcuna rilevanza ai fini del risultato finale. La combinazione *acc* è dunque favorevole solo al primo giocatore, mentre la combinazione *cca* è favorevole solo al terzo. La finzione è indispensabile solo "per rendere tutti i casi uguali". Sembra di sentire la definizione classica di probabilità formulata da Laplace in seguito: la probabilità di un evento è il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili, supposti tutti ugualmente possibili.

... In taking the example of the three gamblers of whom the first lacks one point, and each of the others lack two, which is the case in which you oppose, I find here only 17 combinations for the first and 5 for each of the others; for when you say that the combination *acc* is good for the first, recollect that everything that is done after one of the players has won is worth nothing. But this combination having made the first win on the first die, what does it matter to the third gains two afterwards, since even when he gains thirty all this is superfluous? The consequence, as you have well called it "this fiction," of extending the game to a certain number of plays serves only to make the rule easy and (according to my opinion) to make all the chances equal; or better, more intelligibly to reduce all the fractions to the same denomination.

So that you may have no doubt, if instead of *three* parties you extend the assumption to *four*, there will not be 27 combinations only, but 81; and it will be necessary to see how many combinations make the first gain his point later than each of the others gains two, and how many combinations make each of the others win two later than the first wins one. You will find that the combinations that make the first win are 51 and those for each of the other two are 15, which reduces to the same proportion. So that if you take five throws or any other number you please, you will always find three numbers in the proportion of 17, 5, 5. And accordingly I am right in saying that the combination *acc* is [favorable] for the first only and not for the third, and that *cca* is only for the third and not for the first, and consequently my law of combinations is the same for three players as for two, and in general for all numbers...

TRADUZIONE:⁸

... Nel riprendere l'esempio dei tre giocatori in cui al primo manca un punto, e a ciascuno degli altri ne mancano due, che è il caso che mi avete posto, trovo solo 17 combinazioni per il primo e 5 per ciascuno degli altri, perché quando affermate che la combinazione *acc* è favorevole al primo, ricordate che tutto

⁸ Traduzione dei ragazzi

ciò che viene fatto dopo che uno dei giocatori ha vinto non vale niente. Ma questa combinazione che ha fatto vincere il primo muore dopo il primo lancio, e cosa importa che il terzo guadagni due punti in seguito, poiché anche quando ne guadagnasse trenta tutto questo sarebbe inutile? Di conseguenza, "questa finzione", come la avete ben definita, di estendere il gioco ad un certo numero di lanci serve solo a rendere semplice la regola e (secondo il mio parere) a rendere uguali tutte le opportunità; o meglio, in maniera più comprensibile, per ridurre tutte le frazioni allo stesso denominatore. In modo che non si possa avere più alcun dubbio, se invece di tre partite si estendesse la finzione a quattro, non ci saranno solo 27 combinazioni, ma 81; e sarà necessario vedere quante combinazioni fanno guadagnare al primo il suo punto prima che ognuno degli altri ne guadagni due, e quante combinazioni fanno vincere due punti a ciascuno degli altri prima che il primo ne vinca uno. Troverete che le combinazioni che fanno vincere il primo sono 51 e quelle per ciascuno degli altri due sono 15, che sono nella stessa proporzione [di 17 e 5]. In modo che se si prendono cinque tiri o qualsiasi altro numero si voglia, si troveranno sempre tre numeri nella proporzione di 17, 5, 5. E di conseguenza ho ragione nel dire che la combinazione acc è [favorevole] al primo e non al terzo, e che cca è [favorevole] solo al terzo e non al primo, e di conseguenza la mia regola con le combinazioni è lo stessa per tre giocatori come per due, e in generale per tutti i numeri ...

Abbiamo a questo punto realizzato una simulazione al computer, con il foglio elettronico, ipotizzando tre partite ulteriori quando i giocatori si trovano 5 a 3 e si arriva a 6.

| A2 | | =CASUALE.TRA(1;2) | | | | | | | | | | | | | |
|----|-----------|-------------------|-----------|---|---------------|---------------|---|-----------|---|---------------|---|----------------------------|---|--------------------|---|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O |
| 1 | Partita 1 | Partita 2 | Partita 3 | | Vittorie di A | Vittorie di B | | Vincitore | | Vittorie di A | | Vittorie di A/num. Partite | | Frequenza prevista | |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | 871 | | 0,871 | | 0,875 | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 8 | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 11 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 12 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 13 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | |
| 15 | 2 | 2 | 2 | | 0 | 3 | | B | | | | | | | |
| 16 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 17 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | |
| 18 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 19 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 20 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | |
| 21 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 22 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |
| 23 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | |
| 24 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | |

Estraiamo per 3 volte, a caso, un numero tra 1 e 2, interpretando 1 come vittoria del primo giocatore e 2 come vittoria del secondo: per questo scriviamo =CASUALE.TRA(1;2) in A2, B2, C2.

| E2 | | =CONTA.SE(A2:C2;"=1") | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-----------|-----------------------|-----------|---|---------------|---------------|---|-----------|---|---------------|---|----------------------------|---|--------------------|---|--|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | |
| 1 | Partita 1 | Partita 2 | Partita 3 | | Vittorie di A | Vittorie di B | | Vincitore | | Vittorie di A | | Vittorie di A/num. Partite | | Frequenza prevista | | |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | 871 | | 0,871 | | 0,875 | | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 8 | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 11 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 12 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 13 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 15 | 2 | 2 | 2 | | 0 | 3 | | B | | | | | | | | |
| 16 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 17 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 18 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 19 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 20 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 21 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 22 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 23 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 24 | 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |

Contiamo le vittorie del primo giocatore scrivendo =CONTA.SE(A2:C2;"1") in E2

| H2 | | =SE(F2=3;"B";"A") | | | | | | | | | | | | | | |
|----|-----------|-------------------|-----------|---|---------------|---------------|---|-----------|---|---------------|---|----------------------------|---|--------------------|---|--|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N | O | |
| 1 | Partita 1 | Partita 2 | Partita 3 | | Vittorie di A | Vittorie di B | | Vincitore | | Vittorie di A | | Vittorie di A/num. Partite | | Frequenza prevista | | |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | 871 | | 0,871 | | 0,875 | | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 8 | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 11 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 12 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 13 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 15 | 2 | 2 | 2 | | 0 | 3 | | B | | | | | | | | |
| 16 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 17 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 18 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 19 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 20 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | | | |
| 21 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 22 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | | | |
| 23 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |
| 24 | 1 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | | | |

Assegniamo la vittoria a B se le vittorie di B sono 3, altrimenti assegniamo la vittoria ad A, scrivendo =SE(F2=3;"B";"A") in H2. Copiamo il contenuto della seconda riga fino alla riga 1001.

| | | =CONTA.SE(\$H\$2:\$H\$1001;"=A") | | | | | | | | | | | | |
|----|-----------|----------------------------------|-----------|---|---------------|---------------|---|-----------|---|---------------|---|----------------------------|---|--------------------|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
| 1 | Partita 1 | Partita 2 | Partita 3 | | Vittorie di A | Vittorie di B | | Vincitore | | Vittorie di A | | Vittorie di A/num. Partite | | Frequenza prevista |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | 871 | | 0,871 | | 0,875 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 8 | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 11 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 12 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 13 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 15 | 2 | 2 | 2 | | 0 | 3 | | B | | | | | | |
| 16 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 17 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 18 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 19 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 20 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 21 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 22 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 23 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 24 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |

Contiamo le vittorie di A in 1000 simulazioni scrivendo =CONTA.SE(\$H\$2;\$H\$1001;=A)

| | | =J2/1000 | | | | | | | | | | | | |
|----|-----------|-----------|-----------|---|---------------|---------------|---|-----------|---|---------------|---|----------------------------|---|--------------------|
| | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M | N |
| 1 | Partita 1 | Partita 2 | Partita 3 | | Vittorie di A | Vittorie di B | | Vincitore | | Vittorie di A | | Vittorie di A/num. Partite | | Frequenza prevista |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | 871 | | 0,871 | | 0,875 |
| 3 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 5 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 6 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 7 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 8 | 2 | 2 | 1 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 9 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 10 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 11 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 12 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 13 | 2 | 1 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 14 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 15 | 2 | 2 | 2 | | 0 | 3 | | B | | | | | | |
| 16 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 17 | 1 | 1 | 2 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 18 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 19 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 20 | 1 | 2 | 1 | | 2 | 1 | | A | | | | | | |
| 21 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 22 | 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | | A | | | | | | |
| 23 | 1 | 2 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |
| 24 | 2 | 1 | 2 | | 1 | 2 | | A | | | | | | |

Calcoliamo, infine, la frequenza relativa di vittorie di A dividendo per 1000 il contenuto della cella J2 e lo confrontiamo con la probabilità scritta in N2.

Ripetendo molte volte la simulazione abbiamo notato che la frequenza non si è mai discostata dalla probabilità più del 3%.

In conclusione, nel commentare la corrispondenza tra Fermat e Pascal, i ragazzi hanno ammirato la grandezza dei due grandi matematici francesi, riconoscendo una più immediata comprensione del problema a Fermat.

Un ragazzo ha così precisato: “Questi due grandi matematici sono riusciti a rendere semplicissimo un problema difficilissimo”.

Un grazie particolare ai miei alunni: Silvia, Ario, Sara, Mirian, Tinatin, Veronica, Roberta, Riccardo, Simone, Martina, Andrea, Mirko, Anna, Simona, Riccardo.

BIBLIOGRAFIA

- Barra M. – *Il “problema della divisione della posta in gioco” e delle valutazioni di probabilità: 500 anni di storia – soluzione bayesiana*, in *Atti del Convegno “Il pensiero matematico nella ricerca storica italiana*, Ancona, 26-28 marzo 1992, Pubblicazione n. 13.
- Daboni L.; Wedlin A. – *Statistica un’introduzione all’impostazione neobayesiana*, U.T.E.T., Torino, 1982.
- Dall’Aglio G. – *Calcolo delle probabilità*, Zanichelli, Bologna, 1987.
- Daston L. – *Classical Probability in the Enlightenment*, Princeton University Press, Princeton, 1988.
- David F. N. – *Games God’s and Gambling*, Griffin, London, 1961.
- De Finetti B. – *La logica dell’incerto*, a cura di M. Mondadori, il Saggiatore, Milano, 1989.
- Devlin K. – *La lettera di Pascal*, Rizzoli, Milano, 2008.
- Dupont P.; Roero S.C. – *Christiaan Huygens. De Ratiociniis in Ludo Aleae, con le Annotationes di Jacob Bernoulli (la prima parte dell’Ars Conjectandi)*, Quaderni di Matematica, n. 7, ottobre 1980.
- Edwards A. W. F. – *Pascal’s Arithmetical Triangle*, Griffin, London, 1987.
- Fermat P. – *Oeuvres de Fermat*, a cura di M. M. Paul Tannery e Charles Henry, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
- Hacking I. – *The emergence of Probability*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1975.
- Hald A. – *A History of Probability and Statistics and their Application before 1750*, Wiley, New York, 1990.
- Laplace P. S. – *Oeuvres completes*, Gauthiers-Villars, Paris, 1891.
- Laplace P. S. – *Saggio sulle probabilità*, Laterza, Bari, 1951.
- Mahoney M. S. – *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
- Maistrov L. E. – *Probability Theory. A Historical Sketch*, Birnbaum, New York-London, 1974.
- Maracchia S. – *Le origini del calcolo delle probabilità, Preprint della relazione al Convegno nazionale della mathesis di Gioia del Colle*, aprile 1989.
- Maran D. – Tesi di laurea in matematica: *Aspetti storici e matematici relative al problema della “divisione della posta in gioco” e alla sua generalizzazione nella statistica bayesiana*, relatore prof. Mario Barra, Università “La Sapienza” di Roma, 1994.
- Ore O. – *Pascal and the invention of probability theory*, in *Amer. math. monthly*, vol. 67, No. 5, 1960, 409-419.
- Pascal B. – *Oeuvres de Blaise Pascal*, a cura di Léon Brunschvicg e Pierre Boutroux, Hachette, Paris, 1908.
- Rényi A. – *Letters on Probability*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1972.
- Rényi A. – *Pascal lettere sulla probabilità* a cura di Enzo Lombardo, Stampa Alternativa Millelire, Roma, 1991.
- Sheynin O. B. – *Early History of the Theory of Probability*, in *Archive for history of exact sciences*, vol. 17, 1977, 201-259.
- Todhunter I. – *A History of the Mathematical Theory of Probability (from the time of Pascal to that of Laplace)*, Macmillan, Cambridge.London, prima edizione 1865. Ristampa, Chelsea Publ. Comp., New York, 1965.
- Trembley J. – *De Probabilitate Causarum ab effectibus oriunda*, in *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, vol XIII, 1799, 64-119.
- Trembley J. – *Disquisitio Elementaris circa Calculum Probabilium*, in *Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis*, vol XII, 1796, 99-136.

La corrispondenza Fermat-Pascal può trovarsi, in lingua originale o tradotta in inglese, nelle seguenti opere:

- David F. N. – *Games God’s and Gambling*, Griffin, London, 1961 (in appendice c’è la traduzione in inglese delle lettere a cura di Maxime Marrington).
- Fermat P. – *Oeuvres de Fermat*, a cura di M. M. Paul Tannery e Charles Henry, Gauthier-Villars, Paris, 1891.
- Pascal B. – *Oeuvres*, La Haye, 1779.
- Pascal B. – *Oeuvres Completes* a cura di L. Lafuma, 1963, Edition du Seuil, collection l’intégrale.
- Pascal B. – *Oeuvres del Blaise Pascal*, a cura di Léon Brunchvicg e Pierre Boutroux, Hachette, 1908.
- Smith D. E. – *A Source Book in Mathematics*, ed. Dover, 1929, ristampato nel 1959 (c’è la traduzione in inglese delle lettere a cura di Vera Sanford).
- Parte della corrispondenza può trovarsi tradotta in italiano in:
- Devlin K. – *La lettera di Pascal*, Rizzoli, Milano, 2008.