IL PIACERE DI INSEGNARE IL PIACERE DI IMPARARE LA MATEMATICA

LA STORIA DELLA MATEMATICA IN CLASSE: DALLE MATERNE ALLE SUPERIORI

INTRODUZIONE AL CONCETTO DI DERIVATA

LEZIONI ISPIRATE AL PENSIERO E AI LAVORI DI NEWTON

Relatore

CAMICIOTTOLI ANDREA

CONVEGNO NAZIONALE

10 · 11 · 12 Marzo 2011

Montevarchi – San Giovanni Valdarno – Terranuova Bracciolini – Figline Valdarno

INTRODUZIONE AL CONCETTO DI DERIVATA

Lezioni ispirate al pensiero e ai lavori di Newton

"la filosofia [la natura] è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (e dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, a conoscer i caratteri ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi e altre figure geometriche senza i quali mezzi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi, è un aggirarsi vanamente per un oscuro labirinto."

(Galileo Galilei)

INTRODUZIONE

Lo scopo del presente lavoro è quello di introdurre al calcolo infinitesimale partendo dai lavori di coloro che per primi hanno gettato le basi di questo sistema di calcolo. Spesso i ragazzi lamentano una mancanza di senso nella matematica che viene proposta a scuola, fanno fatica a capire lo scopo di quanto viene insegnato quindi è stato scelto l'approccio storico proprio per evitare un vuoto di significato e restituire alla matematica il suo senso ripercorrendo il cammino del suo sviluppo. Una domanda ricorrente a lezione è "ma questo a cosa serve?" purtroppo molte volte la risposta che possiamo dare non è soddisfacente in quanto le applicazioni pratiche immediate di molti argomenti matematici non sono così vicini alla realtà quotidiana oppure il loro utilizzo è quello di risolvere altri problemi matematici, creando un circolo vizioso che allontana l'interesse degli studenti. Il filo conduttore delle varie lezioni in cui è diviso il lavoro è quello di insegnare ai ragazzi alcuni elementi di calcolo infinitesimale cercando di rendere al meglio il suo significato più pieno, i concetti di fondo, le svariate applicazioni, l'enorme contributo che ha dato per lo sviluppo della scienza moderna al di là dell'ambito puramente matematico.
Spesso i ragazzi imparano a calcolare le derivate delle funzioni, ad applicarle al calcolo delle rette tangenti, alla ricerca dei massimi e minimi senza in realtà capire fino in fondo cosa sono queste derivate e qual è la loro effettiva utilità. Per superare questo limite la storia della matematica può risultare efficace contestualizzando i concetti e fornendo le motivazioni che ne hanno determinato lo sviluppo. Un altro aspetto interessante, o quanto meno affascinante, è quello di toccare con mano le idee e le opere di chi a costruito la matematica invece di utilizzare la rilettura dei libri di testo. Non sempre le descrizioni originali risultano più chiare delle spiegazioni venute in seguito ma sono sicuramente più affascinanti e fertili di riflessioni.

Il presente lavoro è stato svolto in una classe di III liceo classico (quinto anno) ed è stato ben recepito dai ragazzi in quanto si è riusciti a legare la matematica alle altre discipline di carattere umanistico come la storia, le filosofia, le lingue. Nonostante lo sviluppo del calcolo infinitesimale non sia legato ad una sola persona ma sia il risultato di un percorso che ha coinvolto varie figure, è stato scelto di seguire il filo conduttore del pensiero newtoniano. La scelta è legata al fatto che in questo modo si riesce ad introdurre la derivata partendo da una necessità della fisica, da fenomeni facilmente sperimentabili nella vita quotidiana che possono risultare più chiari e convincenti di un problema puramente matematico che risulta più astratto *"Queste generazioni hanno il loro posto nella natura e si compiono quotidianamente nel movimento dei corpi e si manifestano apertamente ai nostri occhi."*. Quando si conosce qualcosa di nuovo la prima impressione è quella che più difficilmente si dimentica; con il tempo si evolve e si completa ma l'impronta originale rimane a lungo impressa. Con l'approccio di Newton si impara a conoscere la derivata prima come grandezza fisica, poi come strumento matematico che risolve anche problemi di natura molto diversa. Si vede che le velocità di variazione sono strettamente legate anche al problema geometrico della tangente e ai problemi di massimo e minimo. Si cerca di trasmettere l'idea che la derivata è molto di più che il risultato di un'operazione di calcolo e questo può essere un percorso efficace.

Si può obiettare che seguire soltanto una linea di pensiero può risultare parziale e fornire una visione limitata della storia della matematica; bisogna però ricordare che il fine del lavoro rimane quello didattico, acquisire delle conoscenze e delle capacità attraverso un percorso storico: la storia della matematica è stata utilizzata come strumento, non come fine. In questa presentazione sono stati colti soltanto gli aspetti del pensiero di Newton che potessero avere un ritorno didattico, sono stati scelti soltanto gli elementi utili tralasciando un'esposizione completa del suo pensiero e dei suoi lavori. Sono state soltanto accennate le varie opere e le rielaborazioni dei suoi concetti, così come è stata proposta la diatriba con Leibniz sulla priorità del metodo soltanto a livello di aneddoto. Si è usata la storia per capire meglio la matematica.

OBIETTIVI

L'argomento è stato presentato con una serie di sei lezioni da un'ora con l'obiettivo che i ragazzi al termine del ciclo avessero acquisito le seguenti conoscenze e competenze:

- Conoscere il contesto storico ed i motivi che hanno portato lo sviluppo del calcolo infinitesimale; far passare l'idea che la matematica si sviluppa insieme alla società, al progresso tecnologico e culturale;

- Conoscere l'interpretazione della derivata sia come tasso di variazione di una grandezza che come coefficiente della retta tangente; acquisire l'idea che questo strumento matematico può essere utilizzato per risolvere problemi di varia natura;

- Conoscere la definizione moderna di derivata; capire come l'idea iniziale si evolve e viene perfezionata nel tempo, osservando che spesso studiamo la matematica in senso opposto a quello cronologico;

- Utilizzare il metodo delle flussioni di Newton per risolvere problemi di massimo e minimo o calcolare la retta tangente ad una curva in un punto; nel seguito verranno risolti gli stessi problemi con il moderno metodo di calcolo, ma questa prima esperienza costituirà una base di partenza.

PREREQUISITI

Il ciclo di lezioni è stato proposto dopo aver concluso il calcolo dei limiti. Anche se la conoscenza dei limiti non è strettamente necessaria per la comprensione degli argomenti proposti e se storicamente la loro introduzione è stata successiva, è indispensabile avere questo prerequisito per avere una migliore comprensione sia della derivata che del concetto stesso di limite. Nel corso delle lezioni infatti si percepisce che tale concetto era già presente seppure in forma ancora incompleta nel pensiero di Newton, ma si capiscono anche le obbiezioni proposte dalla critica del tempo e si riesce a capire come la definizione di limite nasca da una necessità.
Dato che il primo approccio è di tipo fisico, è utile che i ragazzi abbiano già studiato i fondamenti della fisica, in particolare della cinematica in modo che abbiano già l'idea dei concetti di traiettoria, velocità e accelerazione.

LEZIONE 1: I problemi aperti del XVII sec.

Il XVII secolo segna l'inizio della ricerca scientifica secondo un nuovo metodo, lo studio della natura in maniera sistematica utilizzando la matematica ed i suoi progressi. Lo sviluppo della matematica è strettamente legato ad alcuni problemi, all'epoca ancora irrisolti, ritenuti di grande interesse sia culturale che economico. Possiamo dire che i progressi matematici fornirono le risposte ai problemi ma allo stesso tempo furono proprio i problemi aperti a stimolare la nascita e lo sviluppo di nuove tecniche di calcolo e nuovi concetti matematici.

LA CINEMATICA

In ogni campo della filosofia naturale inizia un'accurata analisi dei fenomeni e un tentativo di ricondurli a modelli matematici il più possibile semplici. Per quanto riguarda la "nuova fisica" i risultati migliori furono ottenuti nell'ambito dei fenomeni meccanici ed astronomici data la relativa semplicità della loro osservazione e della loro riproducibilità in laboratorio. In particolare si diffondono rapidamente il pensiero e i risultati degli studi di Galileo sulla cinematica.

Nel suo pensiero la natura è semplice e ordinata, il suo comportamento è regolare e agisce in accordo con leggi matematiche perfette ed immutabili. La scienza deve quindi seguire l'esempio della matematica ovvero deve procedere individuando assiomi o principi fondamentali per poi procedere in modo deduttivo per stabilire nuove verità. L'innovazione radicale di Galileo consiste nel fatto che, contrariamente a quanto avviene per la matematica, i principi fondamentali per la fisica dovessero essere derivati dall'esperienza e dalla sperimentazione e che gli assiomi devono essere di natura quantitativa, dare i valori delle grandezze senza preoccuparsi delle cause ultime. Le leggi fisiche non spiegano ma descrivono ("la cagione dell'accelerazione del moto dei corpi che cadono non è parte necessaria della nostra ricerca"). Galileo ottenne risultati brillanti studiando il moto di sfere metalliche lungo piano inclinati e oggetti in caduta libera, tuttavia questo campo di ricerca continuò ad interessare gli scienziati anche nei decenni successivi; Galileo aveva dato sì le basi generali del metodo, ma si era limitato all'analisi del moto rettilineo e parabolico senza riuscire a costruire un modello generale.

Uno dei principali problemi aperti era quello di spiegare il moto dei pianeti al fine di migliorarne il calcolo della posizione. L'interesse per i problemi astronomici era legato alla necessità di navigare lungo rotte lontane dalle coste, attraverso l'atlantico dove la determinazione precisa della latitudine e della longitudine era di fondamentale importanza e poteva avvenire solo attraverso l'osservazione astronomica. La determinazione della longitudine è relativamente semplice: se si suppone che la stella polare coincida con il polo nord celeste (uno dei due punti immaginari dove l'asse terrestre incontra la sfera celeste), la determinazione dell'altezza della polare all'orizzonte fornisce la latitudine del luogo. Il problema della longitudine è invece più complesso in quanto, in due luoghi alla stessa latitudine ma a diversa longitudine, la volta celeste appare esattamente la stessa in differenti istanti di tempo. Uno dei metodi dell'epoca consisteva nell'osservare la posizione della Luna rispetto alle altre stelle ad una data ora e confrontare il risultato con i valori misurati in una località di riferimento con longitudine nota. Il problema era molto delicato in quanto c'era la necessità di avere a bordo un orologio ed era necessario avere un'esatta conoscenza del moto della Luna: anche solo un piccolo errore nella determinazione della posizione poteva portare ad un errore di parecchi gradi di longitudine. Una miglior conoscenza dell'orbita della lunare sembrava indispensabile.

Alla stessa maniera gli scienziati del Seicento si trovarono di fronte il problema di spiegare i moti terrestri: perché gli oggetti lanciati in aria ricadevano sulla Terra se essa non era più il centro dell'universo? Come mai il moto dei proiettili aveva luogo come se la terra fosse ferma? Le traiettorie dei proiettili, la loro gittata, le altezze che potevano raggiungere e l'effetto della velocità iniziale erano allora questioni fondamentali che ancora avevano bisogno di risposta e i Signori spendevano grandi somme per trovarne la soluzione, in modo da garantirsi vantaggi per la navigazione e migliorare le tecniche militari.

LA TANGENTE AD UNA CURVA

L'interesse per la determinazione della retta tangente ad una curva nasceva sia dalla sua lettura come problema puramente geometrico che per le applicazioni nel campo dell'ottica. Questa scienza era uno dei principali interessi del XVII secolo e la progettazione delle lenti interessava direttamente Fermat, Descartes, Huygens e Newton. Per studiare il passaggio della luce attraverso una lente bisogna conoscere l'angolo di incidenza per poter applicare le leggi di rifrazione. L'angolo in questione è quello tra il raggio luminoso e la normale alla superficie della lente, che può essere determinata in quanto è perpendicolare alla tangente. Il problema quindi era trovare una delle due rette (la tangente o la normale). In realtà erano gia noti dall'antichità alcuni metodi per determinare le tangenti ad alcune curve particolari, ma mancava un metodo generale.

DETERMINAZIONE DI MASSIMI E MINIMI

Un ulteriore problema di carattere generale era quello di determinare il valore massimo o minimo di una funzione. Le applicazioni potevano essere svariate, ad esempio era interessante determinare l'angolo in corrispondenza del quale la gittata di un cannone è massima; si può facilmente capire che i signori del tempo avevano interesse nell'approfondire gli studi sulla balistica in quanto potevano portare vantaggi di tipo militare. Al di là degli interessi applicativi c'erano altri problemi molto dibattuti all'epoca che comunque richiedevano la determinazione del massimo di una funzione, come ad esempio determinare la massima e la minima distanza di un pianeta dal Sole.

LAVORO A CASA

Per introdurre la lezione successiva viene chiesto ai ragazzi di tradurre i passi tratti dal Methodus Fluxionum e dal Quadratura Curvarum. L'indicazione per la traduzione è quella di fare molta attenzione al senso delle frasi, cercare di non fare una traduzione estremamente letterale ma cercare di cogliere i concetti esposti:

"It may be observed, that all the difficulties of these may be reduced to these two problems only, which I shall propose concerning a Space described by local motion, any how accelerated or retarded.

I. *The length of the space described being continually (that is all times) given; to find the velocity of the motion at any time proposed.*
II. *The velocity of the motion being continually given; to find the length of the space described at any time proposed.*

And hence it is, that in what follows, I consider Quantities as if were generated by continual increase, after the manner of a space, which a Body or Thing in Motion describes."

"Now those quantities which I consider as gradually and indefinitely increasing, I shall hereafter call Fluents, or Flowing Quantities, and shall represent them by the final letters of the alphabet v, x, y e z; that I may distinguish them from other quantities, which in equations are to be consider'd as known and determinate, and which therefore are rapresented by the initial letters a, b, c, etc… And the velocities by which every Fluent is increased by its generating motion, (which I may call Fluxions, or simply Velocities or Celerities) I shall represent by the same letters pointed thus $\dot{v}, \dot{y}, \dot{x}$ *and* $\dot{z}$*. That is, for the celerity of the quantity v I shall put* $\dot{v}$ *and so for the celerities of the other quantities x, y and z, I shall put* $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ *respectively."*

Quantitates Mathematicas non ut ex partibus quam minimis conſtantes, ſed ut motu continuo deſcriptas hic conſidero. Lineæ deſcribuntur ac deſcribendo generantur non per appoſitionem partium, ſed per motum continuum punctorum; ſuperficies per motum linearum; ſolida per motum ſuperficierum; anguli per rotationem laterum; tempora per fluxum continuum, & ſic in cæteris. Hæ Geneſes in rerum natura locum vere habent, & in motu corporum quotidie cernuntur.

OSSERVAZIONI

La prima lezione è risultata piuttosto semplice e di facile comprensione, l'unica difficoltà è legata al fatto che si fa riferimento a molti argomenti ognuno dei quali richiederebbe approfondimenti adeguati. È necessario far attenzione a non disperdere le energie dei ragazzi ma a canalizzare la loro attenzione nella direzione voluta. Facendo attenzione all'argomento che richiama maggiormente la loro curiosità si possono programmare lavori futuri di approfondimento.
Per quanto riguarda il lavoro a casa tutti quanti hanno provato a tradurre i brani proposti. L'idea era quella che i ragazzi potessero acquisire le prime idee delle flussioni leggendo brani tratti dalle opere originali e che nella seconda lezione potessero essere riprese e chiarite dall'insegnante. In realtà le traduzioni sono state fatte in maniera molto letterale, senza dare la priorità al senso del discorso, per cui alcuni passi sono stati travisati (ad esempio è stato tradotto "Quantitates Mathematicas… constantes" come "quantità matematiche costanti" invece che "quantità matematiche costituite da…"). È stata necessaria un'ora di lezione soltanto per rivedere la traduzione dei tre passi e fondare bene i concetti di quantità "fluenti" nel tempo, velocità di variazione (spesso riportata dai ragazzi come "variazione di velocità") e familiarizzare con la simbologia.
La difficoltà principale che hanno mostrato i ragazzi è stata quella di capire cosa si intende per velocità locale o velocità istantanea, nonostante non fosse un concetto nuovo ma avessero studiato l'argomento l'anno precedente nell'ambito della cinematica. C'è difficoltà a capire che una grandezza può variare in ogni istante, che la flussione è la velocità di variazione di una grandezza ma che essa stessa può variare nel tempo. Risultano difficili i collegamenti tra le varie discipline, capire che ogni argomento non è un mondo isolato ma risulta collegato al resto. Probabilmente questo tipo di lavoro può allenare la loro capacità di rielaborazione e di cogliere collegamenti interdisciplinari.

LEZIONE 2: Lo studio della cinematica con il metodo delle flussioni

Partendo da due problemi fondamentali della cinematica Newton introdurrà un metodo di calcolo valido in generale per tutte le curve che troverà varie applicazioni, anche in campi diversi dallo studio del moto.

Nello studio del moto la prima difficoltà è data dal fatto che la velocità dei corpi varia da un istante all'altro ma non è semplice da calcolare. Nel calcolo della velocità istantanea non si può dividere lo spazio percorso per il tempo impiegato (come si può fare per una velocità media) perché in un dato istante entrambe le quantità saranno zero. Dall'altro lato è chiaro anche che gli oggetti in movimento hanno una velocità in ogni istante del loro cammino altrimenti sarebbero fermi. Galileo aveva trovato la legge che esprime la velocità istantanea in funzione del tempo per i corpi in moto su un piano inclinato e quelli in caduta libera, ma non c'era ancora un metodo generale valido per traiettorie e moti qualsiasi.

Nel suo trattato *Methodus fluxionum serie infinitarum* sintetizza i problemi fondamentali come segue:

"tutte le difficoltà possono essere ridotte soltanto a due problemi che io proporrò riguardo lo spazio descritto dal moto locale, comunque sia accelerato o ritardato:

- *Data continuamente la lunghezza dello spazio descritto (ovvero in ogni istante), trovare la velocità del moto ad ogni tempo proposto.*
- *Sia data la velocità del moto continuamente, trovare la lunghezza dello spazio descritto ad ogni tempo proposto.*

Nel seguito io considero Quantità come generate da un continuo incremento allo stesso modo dello spazio da un corpo in movimento."

Nello specifico ci occuperemo del primo dei due problemi proposti, che in altre parole potrebbe essere espresso così: "nota la relazione che lega spazio percorso e tempo impiegato determinare la velocità ad ogni istante".

Nella trattazione generale Newton chiama *fluenti* le quantità che variano nel tempo e chiama *flussioni* le rispettive velocità di variazione:

"D'ora in poi queste quantità che considero crescenti gradualmente e indefinitamente le chiamerò fluenti, o quantità fluenti, e le rappresenterò con le ultime lettere dell'alfabeto u, y, x, e z, perché le possa distinguere dalle altre quantità che nelle equazioni si considerano conosciute e determinate, e che quindi saranno indicate con le prime lettere dell'alfabeto a, b, c, ecc. Le velocità invece con cui le fluenti aumentano per il movimento che le genera (velocità che chiamo flussioni o semplicemente velocità o celerità) le rappresenterò con le stesse lettere puntate quindi $\dot{v}, \dot{y}, \dot{x}$ *e* $\dot{z}$. *Così, per la velocità della quantità v porrò* $\dot{v}$ *e allo stesso modo per le velocità delle altre quantità x, y, e z scriverò rispettivamente* $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$*."*

Nel problema da noi considerato la *fluente* è lo spazio percorso, mentre la sua *flussione* è la velocità istantanea. Se consideriamo un intervallo di tempo infinitamente piccolo o allora le grandezze x e y avranno degli incrementi infinitesimi $o\dot{x}$ e $o\dot{y}$ che Newton chiama *"momenti"*; quindi dopo un istante le grandezze x e y avranno un nuovo valore $x + o\dot{x}$ e $y + o\dot{y}$.

Esempio di applicazione:

Consideriamo due quantità fluenti x e y e supponiamo che siano legate dalla relazione $y = ax^2$. Possiamo considerare y la distanza percorsa da un corpo in moto accelerato (ad esempio una pallina su un piano inclinato o un corpo in caduta libera) e con x il tempo trascorso dall'inizio del moto. Dopo un intervallo di tempo infinitesimo o le due grandezze subiranno un incremento e avranno i nuovi valori $y + o\dot{y}$ e $x + o\dot{x}$; la flussione $\dot{y}$ rappresenta la velocità istantanea del corpo in movimento, mentre possiamo porre $\dot{x} = 1$ se consideriamo uniforme lo scorrere del tempo. Sostituendo a x e y il loro valore incrementato, l'equazione $y = ax^2$ diventa:

$y + o\dot{y} = a(x + o\dot{x})^2$ ovvero $y + o\dot{y} = ax^2 + 2ax\dot{x}o + a\dot{x}^2 o^2$

ricordando che $y = ax^2$ si ottiene $o\dot{y} = 2ax\dot{x}o + a\dot{x}^2 o^2$

"si divida per o e sia diminuita la quantità o all'infinito e trascurati i termini evanescenti"[1] (in un altro punto del trattato Newton precisa che i termini moltiplicati per *o* saranno niente rispetto al resto e quindi *evanescenti*); si ottiene il valore della flussione di y ovvero il valore della velocità istante per istante: $\dot{y} = 2ax$.

Questo risultato era già noto a Galileo; facendo esperimenti con il piano inclinato aveva trovato che nel moto accelerato la distanza percorsa è proporzionale al quadrato del tempo trascorso, ovvero che tra le grandezze x e y esiste proprio una relazione del tipo $y = ax^2$. Alla stessa maniera aveva osservato anche che la velocità è direttamente proporzionale al tempo trascorso, ma non sapeva come fossero legate le due relazioni. Il metodo di Newton fornisce un procedimento per determinare la velocità istantanea qualunque sia la relazione che lega spazio e tempo, ma la sua validità va ben oltre, in quanto è valido per ogni genere di grandezza x e y rappresentino.

"Io considero qui le quantità matematiche non come costituite da indivisibili o parti estremamente piccole (quam minimis) o infinitamente piccole, ma come descritte da un movimento continuo. Le linee sono descritte e sono generate non da un'apposizione di parti ma dal movimento continuo dei punti, le superfici dal movimento delle linee, i solidi dal movimento delle superfici, gli angoli dalla rotazione dei lati, i tempi da un flusso continuo e così via. Queste generazioni hanno il loro posto nella natura e si compiono quotidianamente nel movimento dei corpi e si manifestano apertamente ai nostri occhi."
(Tractatus de quadratura curvarum I. Newton *)*

Il risultato fin qui ottenuto risulta ancora piuttosto nebuloso, gli studenti più brillanti hanno colto la questione ma gli altri ancora non hanno capito cosa abbiamo calcolato. È necessario un ulteriore esempio, un problema specifico:

"Un cannone spara un colpo da una torre alta 20m in direzione orizzontale. Il proiettile arriva ad una distanza di 40m dalla torre. Con quale velocità iniziale è stato sparato?"

Si può costruire facilmente l'equazione della traiettoria $y = 20 - \frac{1}{500}x^2$

Calcolando le flussioni prime si ottiene $\dot{y} = -\frac{1}{250}x\dot{x}$

Calcolando le flussioni seconde si ottiene $\ddot{y} = -\frac{1}{250}\left(\dot{x}^2 + x\ddot{x}\right)$ tenendo conto che nel moto dei proiettili $\ddot{x} = 0$ e che $\ddot{y} = -9{,}8m/s^2$ si può ricavare $\dot{x} \approx 50m/s$ e $\dot{y} = \frac{1}{50}x$ ovvero abbiamo sia la velocità orizzontale che verticale in ogni punto della traiettoria.

LAVORO A CASA

Utilizzare il calcolo delle flussioni per ricavare la regola di derivazione del prodotto di funzioni. Siano date le grandezze $z = x \cdot y$ ricavare la relazione tra le flussioni.

[1] Possiamo notare che Newton aveva già in mente l'idea di limite anche se non formalizzata in maniera opportuna. Proprio questo punto piuttosto "oscuro" costituiva il motivo principale delle obbiezioni al suo metodo.

OSSERVAZIONI

Il metodo di calcolo è stato acquisito molto facilmente, tuttavia è stato necessario proporre un esempio numerico per far capire meglio la questione. È stato interessante chiedere hai ragazzi cosa significava per loro la frase di Newton *"sia diminuita la quantità o all'infinito e trascurati i termini evanescenti"* e perché non avesse scritto semplicemente *"si ponga* $o = 0$ *"*… hanno colto che tra le righe si intuisce l'idea di limite.
Il primo dei lavori da svolgere a casa è stato scelto per far ricavare la regola di derivazione del prodotto che poi sarà ripresa nel seguito delle lezioni; in questo modo si gettano le prime basi di elementi che verranno approfonditi in futuro.

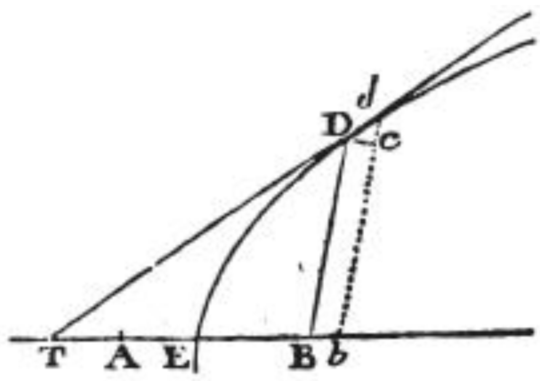
LEZIONE 3: Tangente ad una curva secondo il metodo di Newton

Il problema di tracciare la tangente ad una curva era stato affrontato risolto già da Archimede per alcune curve particolari, tuttavia ogni curva prevedeva un diverso procedimento per il calcolo della tangente, mancava completamente un metodo generale. Descartes, Fermat, Newton e Leibniz elaborano metodi diversi per risolvere questo problema, tuttavia i metodi più generali ed efficaci erano quelli di Newton e Leibniz. I loro lavori avevano punti di vista molto diversi ma allo stesso tempo presentavano tratti simili, al punto che si accese una diatriba sulla priorità del metodo e i matematici dell'epoca si divisero in due fazioni prendendo le parti dell'uno o dell'altro.

L'aspetto interessante del punto di vista newtoniano è che utilizza ancora una volta il metodo delle flussioni; nonostante questo sistema di calcolo sia nato per risolvere problemi di cinematica, trova applicazione anche per risolvere un problema puramente matematico come quello delle tangenti. L'idea di partenza è che una curva può essere pensata come il risultato del moto di un punto, una traiettoria. In questo modo venivano introdotte le curve meccaniche come la spirale di Archimede, oppure la cicloide; Galileo stesso aveva dimostrato che la parabola era la traiettoria di un proiettile sparato in aria con una certa inclinazione rispetto al terreno. Con Roberval, Barrow e Newton il concetto di curva come traiettoria di un punto mobile diventa esplicito, accettato e utilizzato costantemente; pensare una curva in termini cinematici diventa un valido artificio:

"Il metodo delle flussioni suppone che le quantità siano generate dal moto locale ma questa generazione non deve essere necessariamente legata alla natura delle cose generate. Esse possono avere un'esistenza indipendente da questi moti e possono essere prodotte in molti altri modi e ancora godranno delle stesse proprietà. Tuttavia questa concezione, che le quantità sono generate dal moto locale, è una nozione molto fertile e un eccellente artificio per scoprire le loro proprietà." (Methodus fluxionum et serierum infinitarum I. Newton *)*

IL METODO DI NEWTON
(tratto da "*Methodus fluxionum serie infinitarum"*)



Nella sua opera fornisce nove metodi distinti per determinare la tangente ad una curva in un punto dato e propone una serie di problemi accessori. Riporto di seguito il primo metodo proposto:

Sia *BD* una linea retta, o ordinata, con un certo angolo rispetto ad un'altra linea retta, o ascissa, *AB* che determinano la curva *ED*. L'ordinata si muova

di un tratto infinitamente piccolo nella posizione *bd*, così che risulti incrementata del momento *cd*, mentre *AB* risulterà incrementato del momento *Bb* uguale e parallelo a *Dc*. Si prolunghi *Dd* fino ad incontrare *AB* in *T* così che questa linea tocchi la curva in *D* e *d*; i triangoli dcD e DBT saranno simili, così risulta *TB : BD = Dc (o Bb) : cd*.
Poiché la relazione tra *BD* e *AB* è data dall'equazione nella quale è definita la natura della curva, cerca allora la relazione delle flussioni, poi considera *TB* e *BD* nel rapporto delle flussioni di *AB* e *BD*, e *TD* toccherà la curva nel punto *D*.
Chiamando $AB = x$ e $BD = y$ sia la loro relazione $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.
La relazione tra le flussioni sarà $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$.

Poiché $TB : BD = Bb : cd = \dot{x}o : \dot{y}o = 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$ ne deriva $TB = \dfrac{3y^2 - ax}{3x^2 - 2ax + ay}$

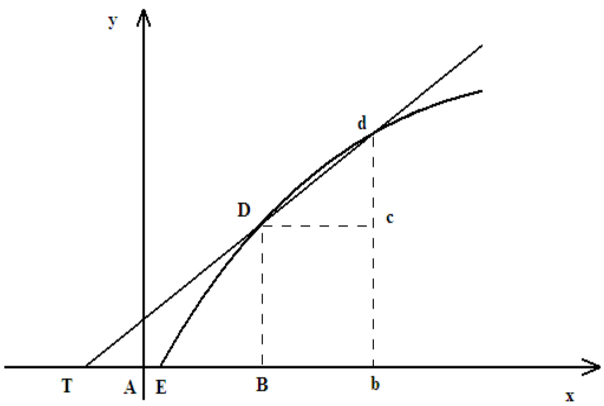
Poiché il punto *D* è dato così come *x* e *y*, la lunghezza *BT* sarà determinata e così la tangente.

In generale $TB = \dfrac{\dot{x}}{\dot{y}} BD$

Se vogliamo esprimere il risultato esplicitando il valore del coefficiente angolare della retta tangente, possiamo ottenerlo dalla relazione precedente:

$$m = \frac{BD}{TB} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

notiamo che il coefficiente angolare della retta tangente è il rapporto tra le velocità istantanee delle grandezze *y e x*.



In questa trattazione si fanno decrescere gli incrementi in maniera infinita, quindi la retta è tangente quando il triangolo dcD si contrae in un punto. Quando *o* decresce i momenti diventano *evanescenti* ma il loro rapporto è una quantità finita.

LAVORO A CASA

Trovare la retta tangente alla curva di equazione $x^3 - 2x^2 - y = 0$ nel punto $P(3;9)$

<u>OSSERVAZIONI</u>

In questa lezione si vede come le quantità che erano state introdotte soltanto come velocità sono adesso utilizzate per tracciare la tangente ad una curva quindi che hanno un significato più ampio. Si può osservare come in realtà questo risultato non dovrebbe sorprendere più di tanto visto che dalla cinematica è noto che il vettore velocità in un punto è tangente alla traiettoria.
Un'altra considerazione interessante da fare riguarda la geometria analitica: Newton parla di ascissa e ordinata ma non fa esplicito riferimento ad assi ortogonali. Possiamo osservare che la scelta del sistema di riferimento cartesiano solitamente utilizzato è una scelta di comodo ma che la geometria analitica potrebbe essere costruita anche usando sistemi di riferimento più generali.
Invece dell'esempio proposto da Newton ho usato una curva più semplice, il cui grafico fosse facilmente tracciabile in modo da verificare subito il risultato. I ragazzi sono rimasti un po' perplessi quando hanno visto che il coefficiente angolare della retta dipendeva da *x*, si aspettavano di trovare un valore costante. Hanno poi convenuto che in ogni punto la retta tangente ha pendenza diversa.

LEZIONE 4: Il problema dei massimi e minimi - soluzione del problema di Fermat

IL METODO DI NEWTON (tratto da "*Methodus fluxionum serie infinitarum"*)

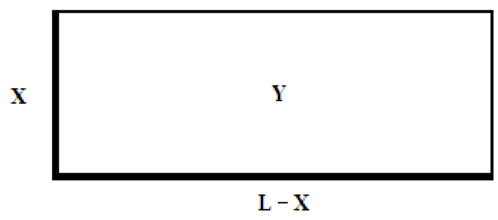
"Quando una quantità assume il più grande valore che può avere in un dato istante, essa non fluirà né in avanti né indietro. Se fluisse in avanti o, in altre parole, aumentasse il proprio valore, proverebbe che non aveva raggiunto il valore massimo e che sarà maggiore immediatamente dopo. Al contrario, se fluisse indietro o stesse diminuendo." Se ciò accade significa che in un istante precedente a quello dato avrebbe valore maggiore provando che non si tratta del valore massimo. *"Quindi resta soltanto da trovare la sua flussione e supporre che sia nulla."*

Nel seguito Newton propone esempi di calcolo per alcune funzioni come $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ e alcuni problemi che possono essere risolti con il suo metodo.

Per fare un esempio di applicazione non tenteremo di risolvere il problema proposto da Newton ma useremo il metodo delle flussioni per risolverne uno presentato da Fermat nella sua opera "*Methodus ad disquirendam maximam et minimam".* Fermat aveva affrontato e risolto il problema di determinare la tangente ad una curva elaborando un proprio metodo che poi poteva applicare anche per risolvere problemi di ricerca dei massimi e minimi. A titolo d'esempio propone il seguente problema: *"dato un segmento si richiede di trovare un punto su di esso tale che il rettangolo che ha come lati i due segmenti in cui il punto divide il segmento dato sia massimo."*

<u>Soluzione</u>

Indicando con L la lunghezza del segmento dato, con x e con $L - x$ la lunghezza dei due tratti in cui viene diviso, l'area del rettangolo si può valutare come segue $y = x(L - x)$.



Calcoliamo le flussioni delle due grandezze con il metodo visto in precedenza

$$y + o\dot{y} = (x + o\dot{x})[L - (x + o\dot{x})]$$

$$y + o\dot{y} = Lx + o\dot{x}L - x^2 - 2ox\dot{x} - o^2\dot{x}^2$$

$$o\dot{y} = o\dot{x}L - 2ox\dot{x} - o^2\dot{x}^2$$

dividendo per o e trascurando i termini evanescenti si ottiene: $\dot{y} = \dot{x}L - 2x\dot{x}$

Se poniamo $\dot{y} = 0$ otteniamo $\dot{x}(L - 2x) = 0$ che ha come soluzione $x = \dfrac{L}{2}$

Il rettangolo di area massima è il quadrato.

LAVORO A CASA

Risolvere il problema proposto da Newton "*In un dato triangolo, o in un segmento di ogni altra curva, inscrivere il rettangolo più grande"* nel caso di un triangolo rettangolo, del triangolo equilatero e del segmento parabolico $y = 4x - x^2$ nel primo quadrante.

OSSERVAZIONI

Il problema di Fermat è risultato un buon esempio perché facilmente comprensibile, se ne può intuire la soluzione ma risulta difficile motivarla ed è convincente. Anche il metodo di calcolo non ha presentato alcuna difficoltà mentre è risultata di difficile comprensione la giustificazione di Newton che risulta piuttosto ermetica. Risulta chiaro che non può essere $\dot{y} > 0$ al contrario non si capisce perché non può essere $\dot{y} < 0$. Uno studente ha citato come esempio il moto di un corpo lanciato in verticale: raggiunge l'altezza massima quando ha velocità zero. In ogni caso ho voluto proporla perché il ragionamento seguito è lo stesso che viene usato comunemente nella dimostrazione del teorema *"se x_o è un punto di max o min relativo allora* $f'(x_o) = 0$ *"* e che verrà ripresentato ai ragazzi nel seguito. Inoltre è un modo di ragionare usato spesso in matematica: per dimostrare che una certa quantità è zero si dimostra che non può essere né maggiore né minore di zero. Ancora una volta questa scelta è stata fatta nell'ottica del lavoro futuro.

LEZIONE 5: Le critiche al metodo delle flussioni – la definizione moderna di derivata

Il metodo di Newton fu apprezzato da una parte della comunità scientifica ma non mancarono le critiche dato che presenta dei punti oscuri. Newton stesso ne dà varie versioni in opere successive, cercando ogni volta di chiarire i suoi concetti e di esprimerli in una teoria senza difetti. A questo scopo cercava di ricondursi il più possibile alla geometria, sia perché le dimostrazioni potessero risultare più comprensibili ai suoi contemporanei, sia perché il valore della geometria era ritenuto nettamente superiore rispetto all'algebra. Nella terza edizione dei *Principia Mathematica* risulta evidente questo processo di ricorso alla geometria, Newton elimina addirittura le *flussioni* per lavorare con i *"primi ed ultimi rapporti"* tra curve e segmenti (quando essi si generano o svaniscono) ma, nonostante gli sforzi compiuti, i lati oscuri del metodo rimangono.

Una critica severa, al calcolo infinitesimale in genere e nello specifico ai lavori di Newton, fu pubblicata dal filosofo e arcivescovo irlandese George Berkeley nel 1734 tramite un opuscolo *"The Analyst, or a discourse addressed to an infidel Mathematician. Wherein it is esamine whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith."*
La sua critica obbietta prima di tutto il fatto che non viene data una definizione di *"flussione"* o di quantità evanescenti: *"cosa sono queste flussioni? La velocità di incrementi evanescenti. E cosa sono questi incrementi evanescenti? essi non sono quantità finite, non sono infinitesimi, non sono niente."* Nel seguito centra il punto debole del calcolo osservando quanto segue: se ho una grandezza *y* legata ad un'altra grandezza *x* dalla relazione $y = f(x)$ per calcolare la flussione della grandezza *y* devo calcolare il rapporto $\dot{y} = \dfrac{f(x + o\dot{x}) - f(x)}{o}$ e porre $o = 0$. Il problema nasce dal fatto che si divide per *o*, supponendo quindi che non sia nullo, ed in seguito si considera nullo; se così fosse anche il numeratore della funzione dovrebbe essere zero e la flussione sarebbe uguale al rapporto $\dfrac{0}{0}$.

Lo stesso problema si presenta se consideriamo il rapporto tra segmenti che diminuiscono in dimensione finché si annullano.

Anche Lagrange avanza delle critiche: *"questo metodo ha il grande inconveniente di considerare le quantità nello stato in cui cessano, per così dire, di essere quantità; infatti, anche se possiamo sempre concepire propriamente i rapporti di due quantità fintanto che esse rimangono finite, il* *rapporto non offre alla mente nessuna idea chiara e precisa quando i suoi termini diventano entrambi contemporaneamente nulli."*

Le critiche qui riportate non sono riferite solamente a Newton ma a tutti i sostenitori del calcolo infinitesimale. Vari matematici tentarono di dare delle risposte e delle giustificazioni, senza però riuscire pienamente nel loro intento. Il tassello mancante era il concetto di limite!
Nella terza edizione dei *Principia Mathematica* Newton propone un commento che tenta di chiarire le sue idee e di dare una risposta alle critiche:

"Si obietta che non esiste l'ultimo rapporto di quantità evanescenti, in quanto esso, prima che le quantità siano svanite non é l'ultimo, e allorché sono svanite non c'é affatto. Ma con lo stesso ragionamento si può giustamente sostenere che non esiste la velocità ultima di un corpo che giunga in un certo luogo, dove il moto finisce. La velocità, infatti, prima che un corpo giunga nel luogo non é l'ultima, e quando vi giunge non c'é. La risposta é facile: per velocità ultima si intende quella con la quale il moto cessa, non dopo, ma proprio nel momento in cui vi giunge: ossia, quella stessa velocità con la quale il corpo giunge al luogo ultimo e con la quale il moto cessa. Similmente, per ultime ragioni di quantità evanescenti si deve intendere il rapporto delle quantità non prima di diventare nulle e non dopo, ma quello col quale si annullano…"

"Le ultime ragioni (gli ultimi rapporti) con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni (i rapporti) delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni (i rapporti) si possono avvicinare per più di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito…"

"Nel seguito, se talvolta menzionerò le quantità quanto più piccole possibili o evanescenti o ultime, bada a intendere quantità determinate in grandezza ma pensa sempre a quantità che debbano diminuire senza limite."

Anche questi commenti risultano piuttosto oscuri e non furono sufficienti a dissipare le perplessità sul calcolo infinitesimale tuttavia possiamo notare che da queste righe traspare l'idea del limite: le quantità evanescenti non sono nulle ma tendono a diminuire continuamente in maniera infinita.

Nonostante le critiche, i notevoli risultati che il calcolo differenziale era in grado di produrre incoraggiarono il suo utilizzo e stimolarono la ricerca di una teoria completa e rigorosa che ne giustificasse la validità.

CONCLUSIONE - LA VERSIONE MODERNA DI CAUCHY

Al di là dell'approccio dinamico del suo pensiero, l'elemento fondamentale che manca nella teoria di Newton è una definizione chiara del concetto di limite, anche se in più punti dei suoi scritti possiamo riscontrare la presenza di tale idea; bisognerà attendere D'Alambert e Cauchy per completare il quadro e dare all'analisi matematica la veste usata ancora oggi. Nel 1821 viene pubblicato il primo dei due trattati scritti da Cauchy per gli studenti dei suoi corsi all'École Polytechnique, il *Cours d'analyse*. Il concetto di limite viene posto alla base di tutte costruzioni dell'analisi. Le flussioni di Newton sono l'antenato di quella che oggi chiamiamo *derivata* e che riassume tutti i significati precedentemente esposti:

- velocità istantanea con cui varia una grandezza;
- coefficiente angolare della retta tangente ad una curva;
- strumento per determinare i punti stazionari di una funzione.

Nel secondo volume *Résumé des leçons sur le calcul infinitesimal* di Cauchy, la teoria dei limiti è applicata al calcolo infinitesimale e viene definita rigorosamente la "derivata" come limite del rapporto incrementale.

Data una funzione $y = f(x)$ la sua *derivata* è $$y'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Per la stessa funzione la *flussione* è $$\dot{y} = \frac{f(x + o\dot{x}) - f(x)}{o}$$

OSSERVAZIONI

Quest'ultima lezione è indispensabile come collegamento tra le flussioni di Newton e la derivata nella concezione contemporanea e serve per sottolineare l'importanza del concetto di limite. I ragazzi hanno colto i problemi sollevati dalle critiche al metodo delle flussioni e hanno capito velocemente che il tassello mancante nella trattazione era proprio una chiara definizione di limite. In questa occasione sono state ricapitolate anche le altre lezioni sottolineando nuovamente gli elementi essenziali.

CONCLUSIONI

Per verificare l'efficacia di questa presentazione ho proposto ai ragazzi una prova a sorpresa con lo scopo di valutare quanto erano riusciti ad apprendere dalle lezioni senza che si fossero preparati alla prova. L'idea era quella di valutare quanto questo tipo di approccio fosse risultato incisivo per l'acquisizione degli elementi fondamentali. La verifica consisteva nei seguenti quesiti:

- Spiega cos'è la derivata di una funzione.
- Descrivi brevemente i motivi che hanno portato lo sviluppo del calcolo infinitesimale.
- Spiega la differenza tra il concetto di flussione secondo Newton e il moderno concetto di derivata.

I ragazzi sapevano che non sarebbero stati necessariamente valutati, quindi che potevano rispondere con tranquillità riportando ciò che ricordavano.
L'esito della prova, sostenuta da 16 studenti, è stato il seguente:

Quesito 1: 7 risposte corrette
6 risposte corrette ma con imprecisioni
3 risposte errate

Quesito 2: 16 risposte corrette

Quesito 3: 13 risposte corrette
3 risposte errate o non date

Risposte errate al primo quesito: "la derivata è una grandezza che varia" " la derivata è la variazione di velocità di una grandezza"

L'esito della prova è stato soddisfacente nel senso che gli elementi essenziali sono passati ai ragazzi in maniera piuttosto uniforme nella classe, sia tra chi ha seguito meglio le lezioni che tra chi ha partecipato in maniera distratta. È interessante notare come l'introduzione storica richiesta dal secondo quesito sia stata ricordata meglio dai ragazzi anche a distanza di tempo. Il passo successivo nella comprensione è necessariamente legato allo studio personale allo studente.

Ritengo che l'approccio storico utilizzato abbia il vantaggio di trasmettere un'idea ampia del concetto di derivata che si perde se viene proposta soltanto come limite del rapporto incrementale. Un altro aspetto positivo è la possibilità di trarre spunti per eventuali tesine da presentare all'esame di maturità, collegamenti con le altre discipline per costruire un sapere completo. In ogni caso non deve mancare un elevato numero di esempi che risultano essere l'elemento più efficace per una chiara comprensione. Queste lezioni hanno fornito una base di partenza, il lavoro poi deve proseguire con le derivate delle funzioni elementari, le regole di derivazione e i teoremi sulle derivate. Sicuramente questo tipo di approccio può favorire successivamente alcuni cenni alle equazioni differenziali più semplici che risolvono problemi nei quali si opera con grandezze che variano nel tempo. È un'occasione per far vedere ai ragazzi uno degli strumenti matematici più efficaci per ogni scienza.

Il lavoro nel suo complesso ha richiesto 6 ore di lezione, che nell'economia del corso di matematica di un liceo classico sono numero consistente. Tuttavia ritengo siano state un buon investimento in quanto hanno fornito dei buoni spunti di riflessione e ne possono favorire altri nel proseguo anche a costo di rinunciare ad altre parti del programma, magari di un teorema o di una dimostrazione. Ritengo sia più utile fornire un'idea chiara e completa di pochi concetti chiave rispetto alla conoscenza disorganica e memonica di molti elementi.

APPENDICE

Metodo generale per il calcolo delle flussioni

Supponiamo di conoscere la relazione tra y e x ad ogni istante e proviamo a trovare la relazione tra le flussioni: se la relazione tra le due grandezze è del tipo $y = ax^n$ in ogni istante questa può essere scritta anche dopo un tempo infinitesimo $y' = ax'^n$ e sostituendo a x' e y' le loro espressioni si ottiene $y + o\dot{y} = a(x + o\dot{x})^n$; applicando lo sviluppo in serie per la potenza del binomio ideata dallo stesso Newton si ottiene quanto segue:

$$y + o\dot{y} = a\left[x^n + nx^{n-1}o\dot{x} + n(n-1)x^{n-2}o\dot{x}^2 + ...\right]$$

Ricordando che $y = ax^n$ possiamo semplificare la precedente espressione

$$o\dot{y} = a\left[nx^{n-1}o\dot{x} + n(n-1)x^{n-2}o^2\dot{x}^2 + ...\right]$$

dividiamo per o e nell'espressione che ne deriva sia diminuita la quantità o all'infinito e trascurati i termini evanescenti. Il risultato finale è il seguente:

$$\dot{y} = anx^{n-1}\dot{x}$$

da cui ricaviamo il rapporto tra le flussioni: $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}} = anx^{n-1}$

Questo procedimento è valido per tutte le funzioni razionali e irrazionali. Per funzioni trigonometriche e logaritmiche Newton usa gli sviluppi in serie per ricondursi al problema noto.

BIBLIOGRAFIA

- Enrico Giusti, *Analisi Matematica 1*, Bollati Boringhieri, Torino (1996)
- Enrico Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al novecento*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali (2007)
- Isaac Newton, *The method of fluxions and infinite series,* (1736)
  `http://books.google.com`
- Isaac Newton, *Tractatus de quadratura curvarum,* (1704)
  `http://books.google.com`
- Isaac Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, (1687)
  `http://books.google.com`
- Morris Kline, *Storia del pensiero matematico*, Biblioteca Einaudi (1999)