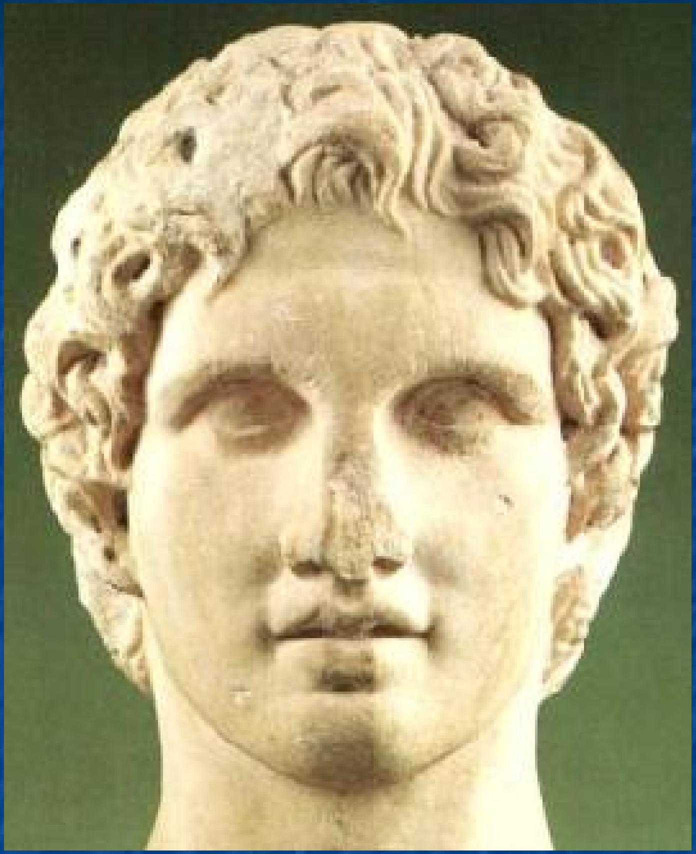
Sviluppi della trigonometria

Alessandra Fiocca
Università di Ferrara



- Alessandro Magno fondatore di Alessandria d’Egitto
- Tolomeo I Soter (367 c. -283 a. C.) fondatore del regno ellenistico d'Egitto

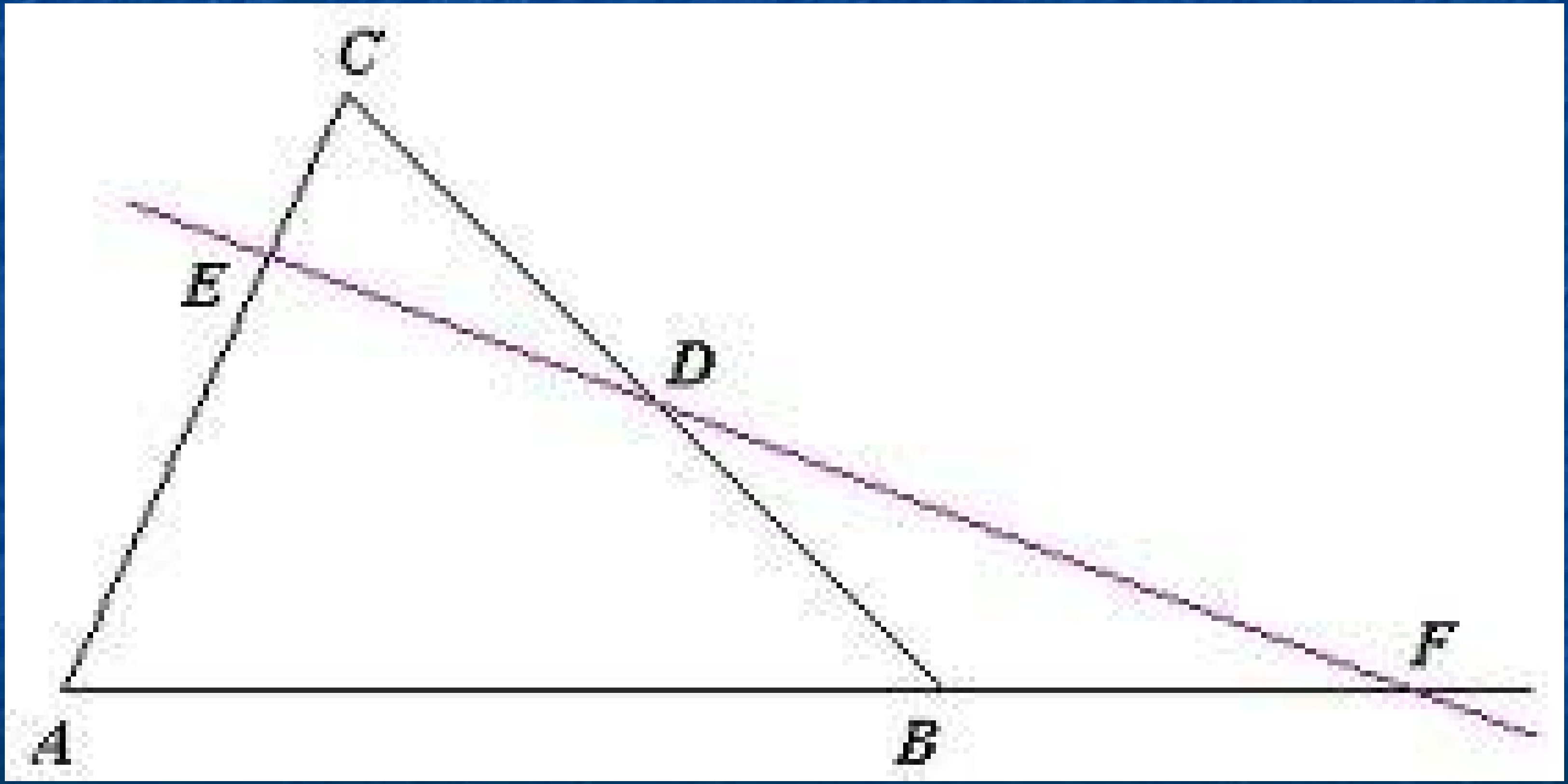
Geometria quantitativa della sfera

Primi contributi alla trigonometria

- Ipparco da Rodi (II sec. a. c.)
- Teodosio da Tripoli (I sec. a.c.)
- Menelao di Alessandria (I-II sec. d.c.)
- Claudio Tolomeo (II sec. d.c.)

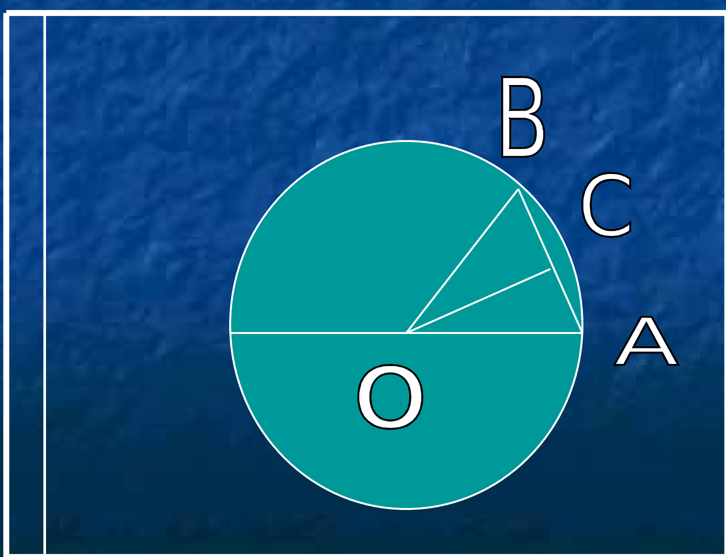
Teorema di Menelao

regula sex quantitatum



Tradizione babilonese

- la semicirconferenza per misurare gli archi è divisa in 180 parti (gradi) e il diametro del cerchio per misurare le corde è diviso in 120 parti
- Approssimazione di $\pi=3$

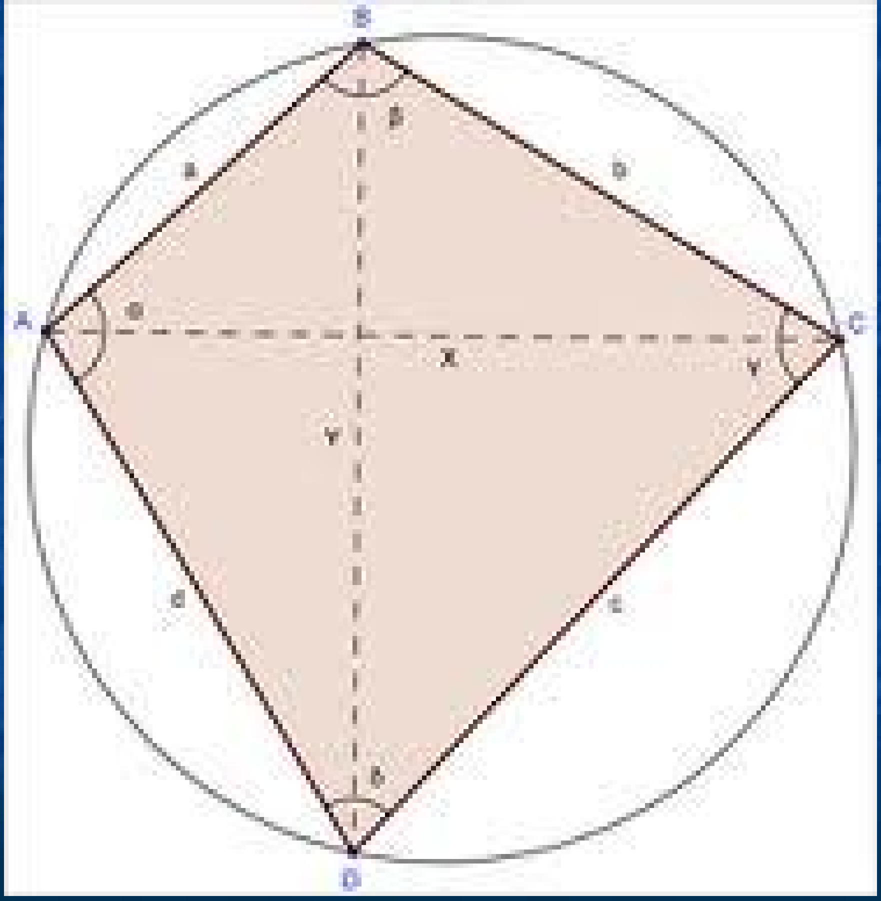


Arco/ angolo	corda
180°	120
60°	60
Arco AB=α°	BC=60 sen$\alpha/2$ AB=120 sen$\alpha/2$ $c(\alpha)=120$ sen$\alpha/2$ sen$\alpha=c(2\alpha)/120$

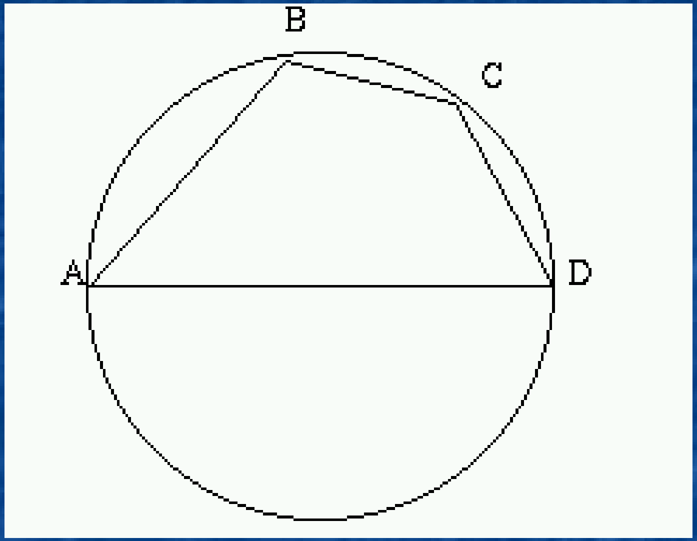
Claudio Tolomeo (II sec. d. c.)

- *Almagesto, I libro*
- Tavola delle corde di mezzo grado in mezzo grado da 1° 180°

Costruzione della tavola delle corde: il teorema di Tolomeo



Teorema di Tolomeo



Posto Arco AB=α; Arco AC=β

Per il teorema di Tolomeo

$$c(\beta)c(180-\alpha)=c(\alpha)c(180-\beta)+120c(\beta-\alpha)$$

- Ricordando che c(α) =120 sen α/2 la formula precedente si traduce nella nota forma di sottrazione dei seni

$$\operatorname{sen}\frac{\beta-\alpha}{2}=\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

- Analogamente si ottiene la formula di bisezione che permette di calcolare corde corrispondenti ad archi sempre più piccoli

$$c^2(\alpha) = \frac{60c^2(2\alpha)}{120 + c(180 - 2\alpha)}.$$

Arco	corda
60°	Lato dell’esagono regolare
36°	Lato del decagono regolare
72°	Lato del pentagono regolare
12°	Per differenza
6°	Bisezione
3°	Bisezione
1° 30’	Bisezione
45’	Bisezione

La corda di 1° per approssimazione:

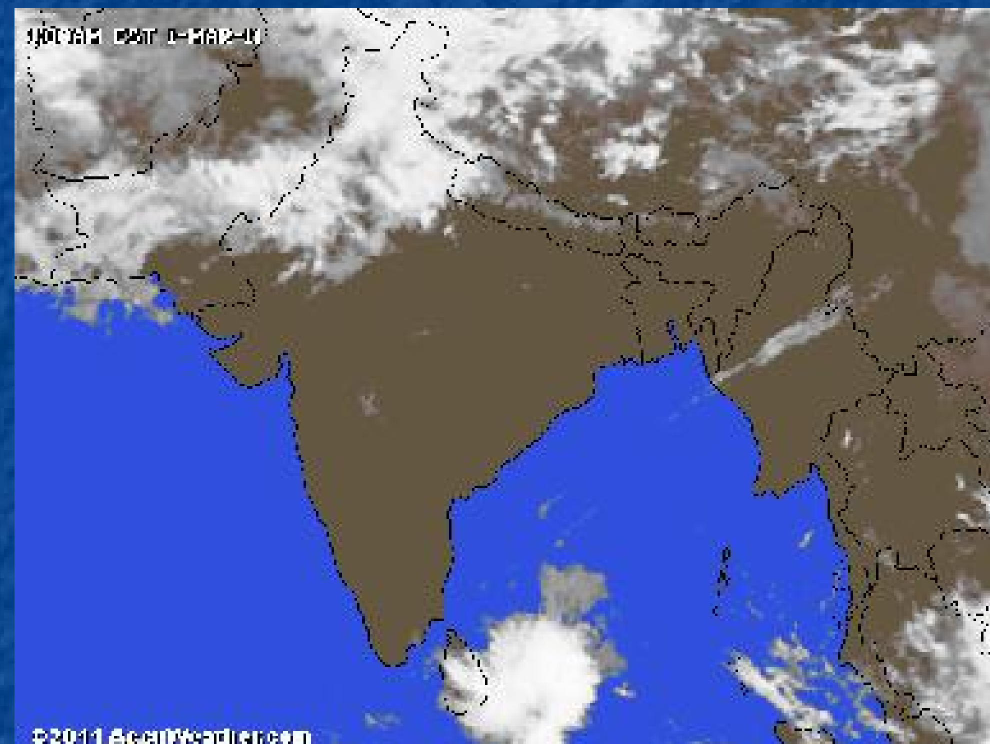
Per due archi α e β con $\alpha > \beta$ risulta

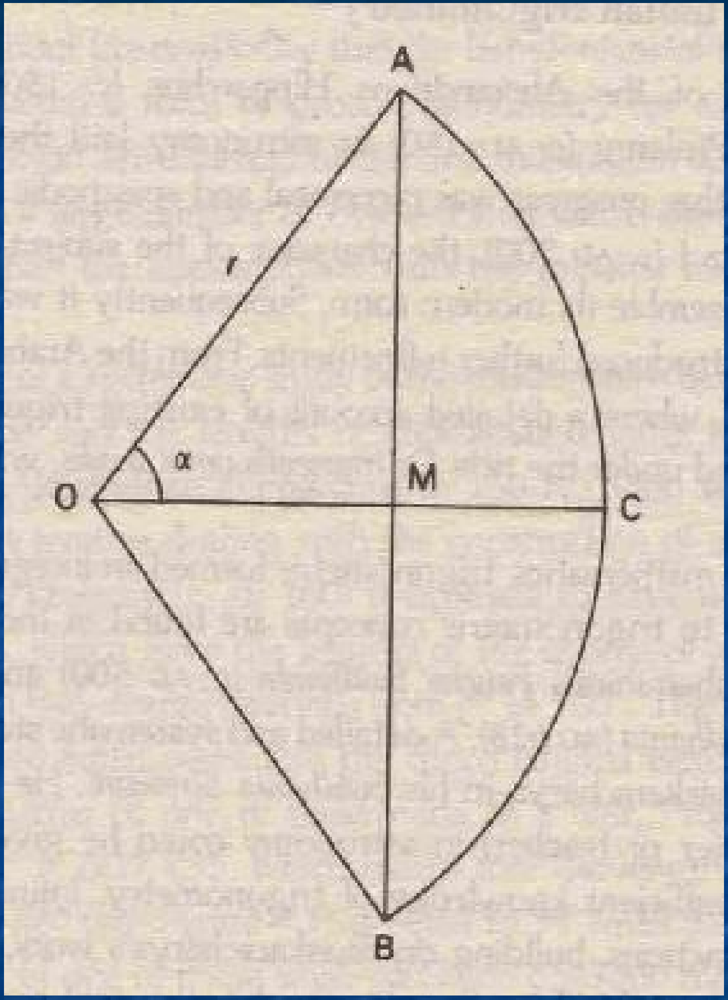
$$c(\alpha)/c(\beta) < \alpha/\beta$$

da cui

$$2/3\ c(1°\ 30') < c(1°) < 4/3\ c(45')$$

I contributi Indiani





- *Jya-ardha o semplicemente jya* rappresenta in figura la mezza corda AM.

Etimologia della parola “seno”

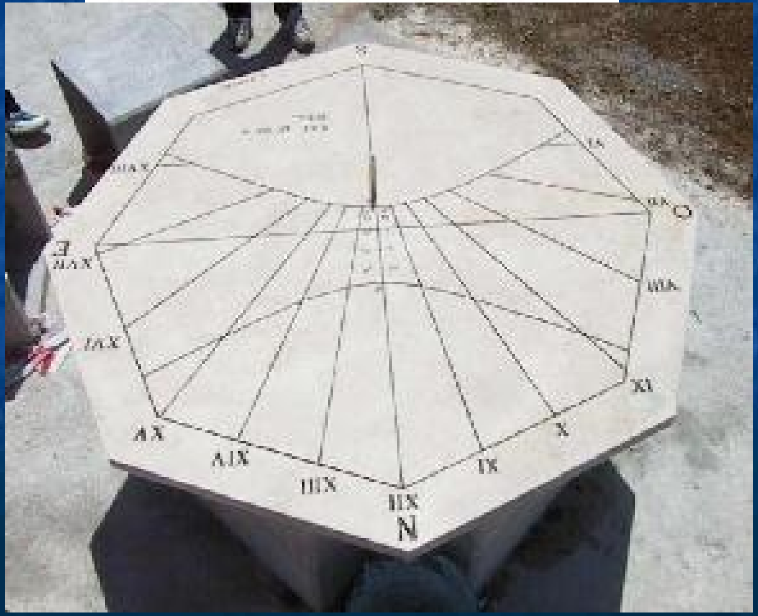
- Il termine sanscrito *jya* fu traslitterato in arabo e divenne *jiba* o *jb.*

- In seguito gli arabi adottarono al posto di *jiba,* parola priva di significato in quella lingua, la parola *jaib* che significa baia o rada.

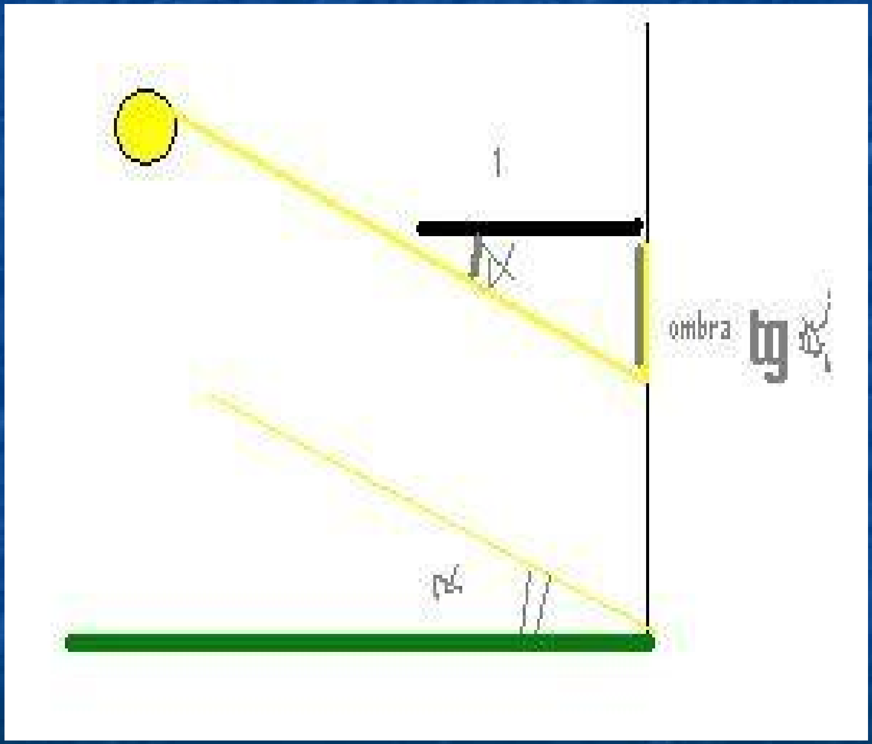
- Nel XII secolo Gherardo da Cremona tradusse con la parola latina *sinus* il termine arabo *jaib*

La gnomonica

- La tangente e la cotangente sono nate nell’ambito della gnomonica, la scienza degli orologi solari, rispettivamente verticali e orizzontali.

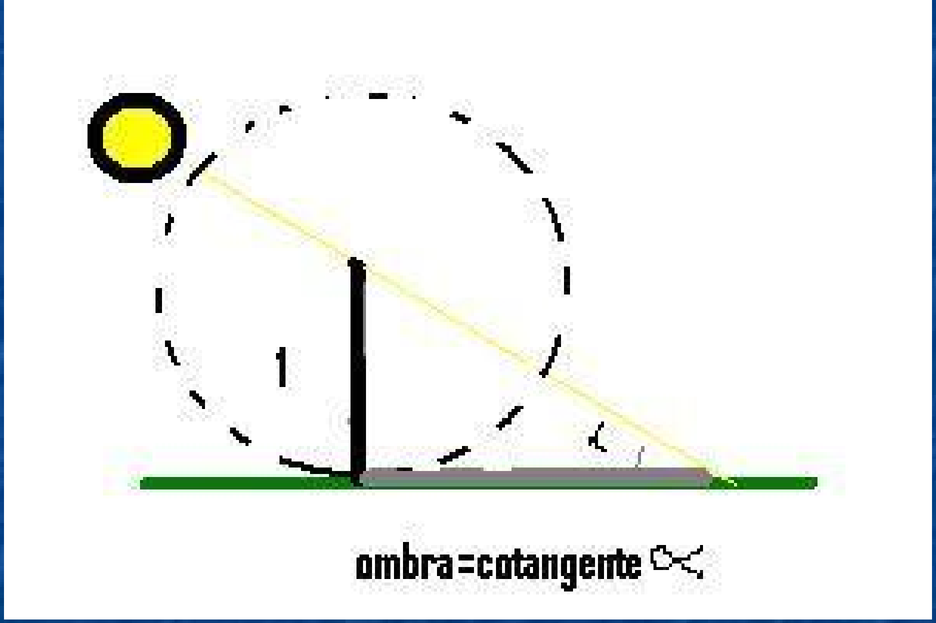


Tangente (*umbra versa*)



- l'ombra gettata sul piano verticale da uno gnomone orizzontale di lunghezza 1
- Il termine **tangente** è stato introdotto nel XVI secolo (T. Fink 1583) quello di **cotangente** nel XVII secolo (Gunter 1620)

Cotagente (*umbra recta*)



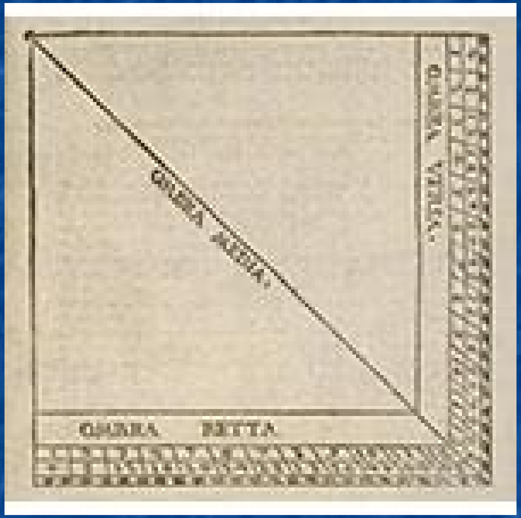
- l'ombra gettata sul piano orizzontale da uno gnomone verticale di lunghezza 1
- Nei due casi l’angolo è l’altezza del sole sull’orizzonte che poteva essere così determinato dalla lunghezza delle ombre.

Quadrato geometrico

- Porta inciso su due lati contigui il **quadrato delle ombre**. All'angolo opposto è incernierata una linda con traguardi. All'interno del telaio si trova un quarto di cerchio con la scala dei gradi e al centro una bussola con ago magnetico

- **Georg von Peurbach nel trattato *Quadratum geometricum*** (Norimberga, 1516).
- http://catalogo.museogalileo.it/multimedia/QuadratoGeometrico.html

Quadrato delle ombre

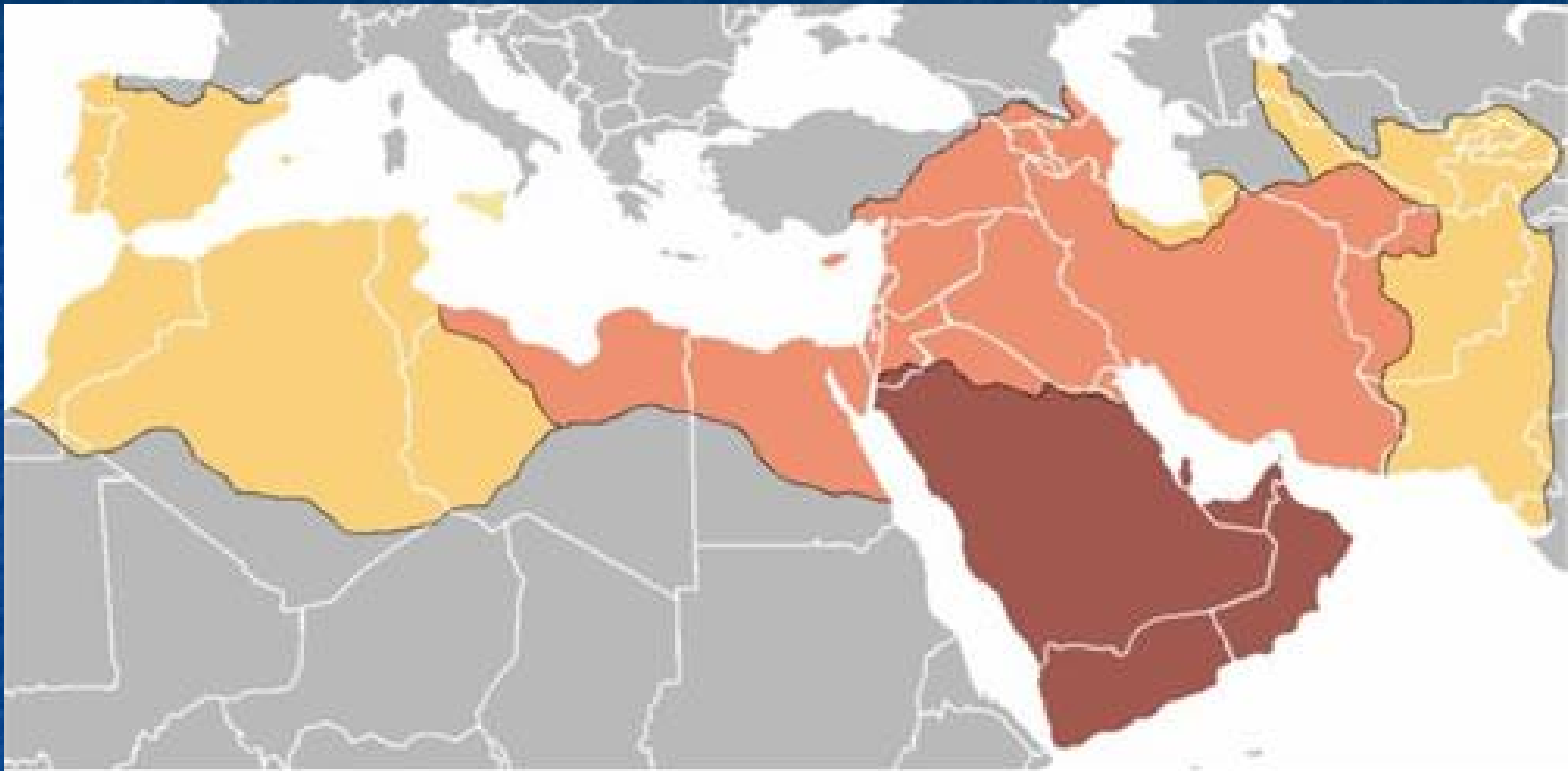


Serve a misurare altezze e distanze, simulando il rapporto tra uno gnomone e la sua ombra.

- *Umbra recta:* l'ombra gettata sul piano orizzontale da uno gnomone verticale quando il raggio del Sole è inclinato da 0° a 45°,
- *Umbra versa* : l'ombra gettata sul piano verticale da uno gnomone orizzontale quando il raggio del Sole è inclinato da 45° a 90°.

Quando il raggio è inclinato di 45°, le due ombre si equivalgono (***umbra media***).

Gli Arabi



Furthest Extent of the Arab Empire by about 750 CE.
Muhammad (622-632),
Rashidun Caliphate (632-661)
Umayyad Caliphate (661-750)

Metodo di Al-Kashi per il calcolo approssimato del sen1°

- Al-Kashi astronomo persiano del XV secolo
- Basato sulla formula che dà il seno di 3α in termini del seno di α

$$\text{sen}\ 3\vartheta = 3\,\text{sen}\ \vartheta - 4\,\text{sen}^3\,\vartheta.$$

- Per $\theta=1°$, posto $x=\text{sen}1°$ la relazione precedente diventa

$$3x=4x^3+\text{sen}3°$$

Posto $a=\text{sen}3°$ (noto con precisione arbitraria grazie alle formule di bisezione) si tratta di risolvere l'equazione cubica

$$3x=4x^3+a$$

Se x è piccolo, $4x^3$ si può trascurare e dunque:

$x_1=a/3$ (prima approssimazione)

$3x_2=4x_1^3+a$ (seconda approssimazione)

$3x_3=4x_2^3+a$ (terza approssimazione)

Ecc.

Sviluppi in Occidente

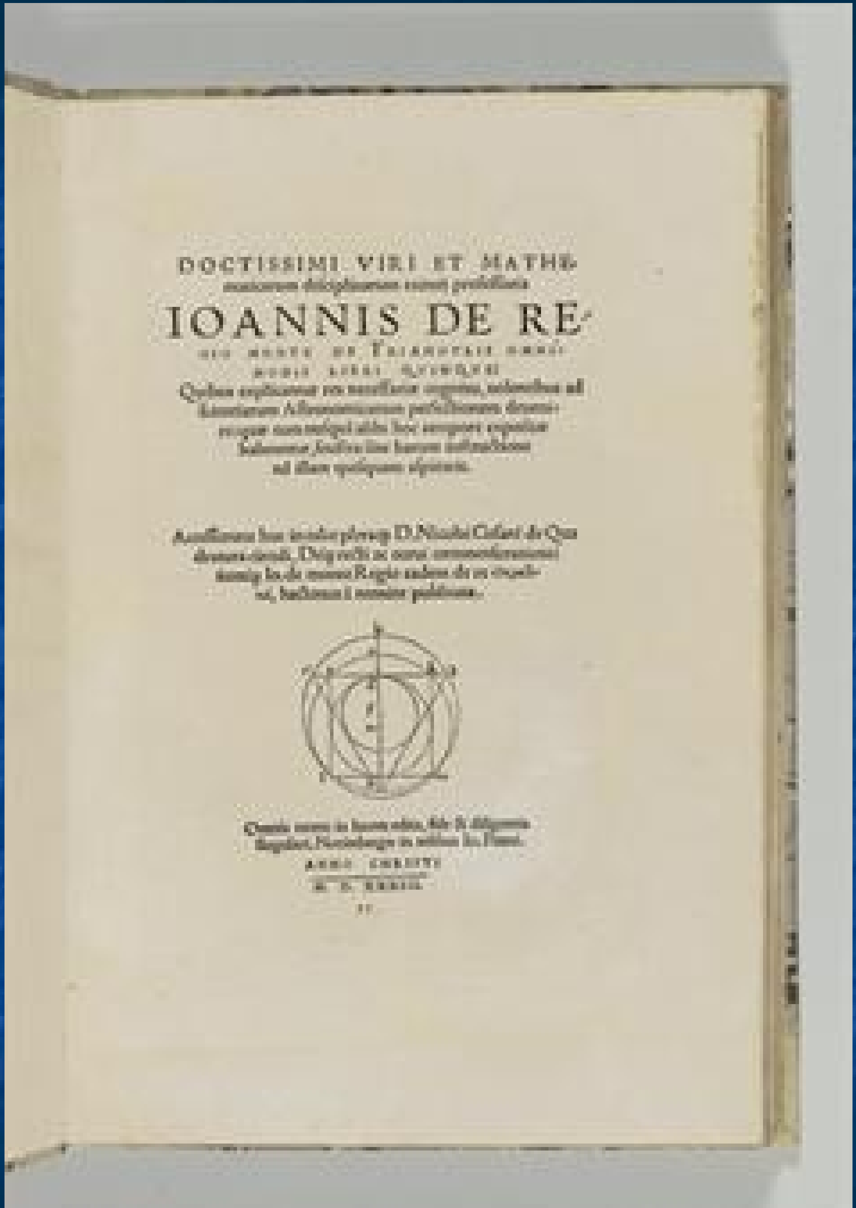
- **Peuerbach** (1423-1461) (di 10’ in 10’)
- **Regiomontano** (1436-1476) (di 1’ in 1’)
- **Copernico** (1473-1543); **Retico** (1514-1577) (di 10’’ in 10’’)
- **Viéte** (1540-1603) (formule di moltiplicazione)

Topografia e primi trattati di trigonometria

- Regiomontano, *De triangulis omnimodis* (1533) ma dcritto circa nel 1464
- Copernico nel *De revolutionibus orbium caelestium* (1543)

- Il termine trigonometria appare per la prima volta nell'opera di **Bartholomaeus Pitiscus**, *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* (1595)


TRIGONOMETRIAE
Geodæticorum,
Geographicorum,
Astronomicorum:


DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
IOANNIS DE RE-

Tavole logaritmico-trigonometriche

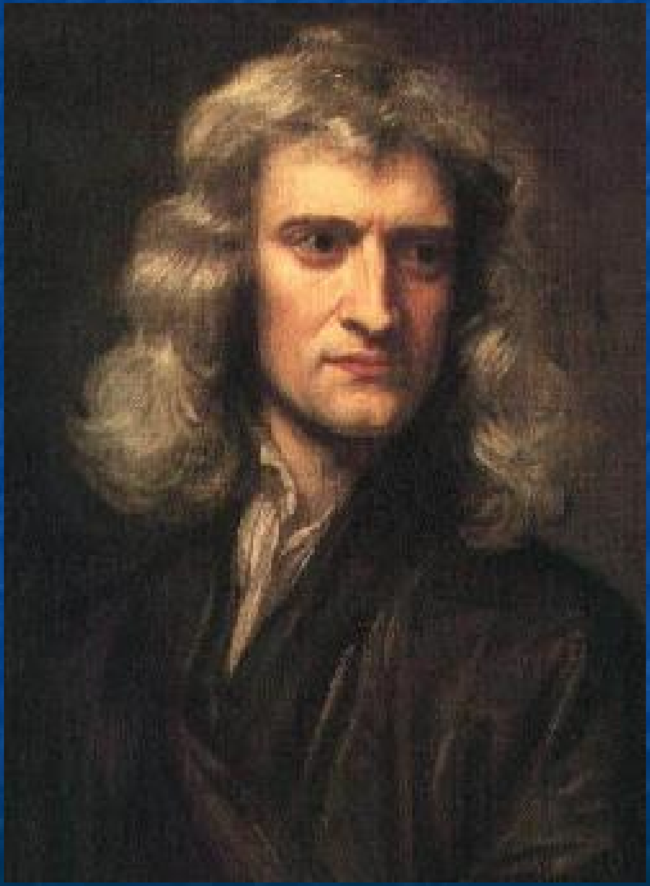
John Napier (1550-1617)

il teorema dei seni per la risoluzione dei triangoli

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} \beta - \log \operatorname{sen} \alpha,$$

Le funzioni circolari XVII secolo



Formule di Eulero
XVIII secolo

- inattese relazioni

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

$$\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta = e^{i\vartheta}$$

$$z = \varrho e^{i\vartheta}.$$

Siti di interesse

- http://web.math.unifi.it/archimede/archime

- Leo Rogers, History of trigonometry

http://nrich.maths.org/6843&part=

http://nrich.maths.org/6853&part=

http://nrich.maths.org/6908