Piccola storia della trigonometria

Alessandra Fiocca
Università di Ferrara

Origini della trigonometria

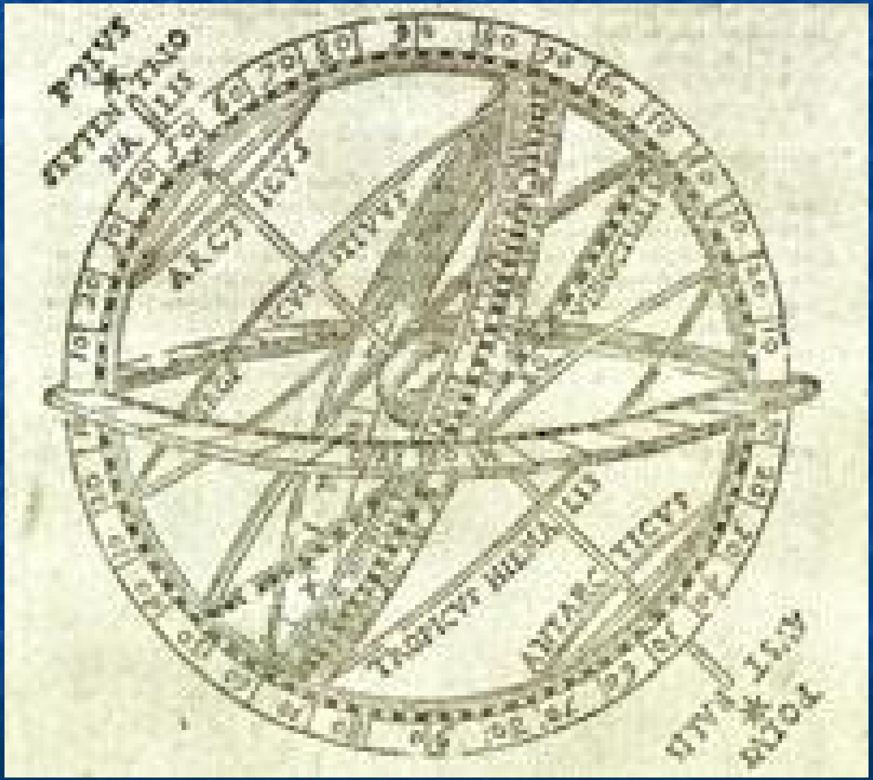
- La trigonometria nacque in stretta unione con gli studi astronomici sviluppati nella scuola matematica greca di Alessandria d'Egitto

- matematica alessandrina: rivolta sia alla matematica pura sia alle applicazioni, ottica, pneumatica, meccanica, geodesia.

- Cosmologia (*Fisica* e *De cielo* di Aristotele, struttura dell'universo, le cause dei moti)
- Astronomia quantitativa capace di prevedere i fenomeni celesti, utile alla vita quotidiana (calendario, navigazione

Geometria quantitativa della sfera

- In antichità l'astronomia era basata sulla nozione della terra al centro di una serie di sfere di cristallo.
- Per calcolare le posizioni di stelle e pianeti bisognava ricorrere a una geometria quantitativa sulla sfera.
- Sebbene oggi la trigonometria sia insegnata generalmente iniziando dai triangoli piani, alle sue origini vi è la geometria dei triangoli sferici



Trigonometria greca e trigonometria moderna

- uso delle corde di un cerchio invece dei seni: dato un cerchio di raggio assegnato, trovare la lunghezza della corda sottesa da un determinato angolo

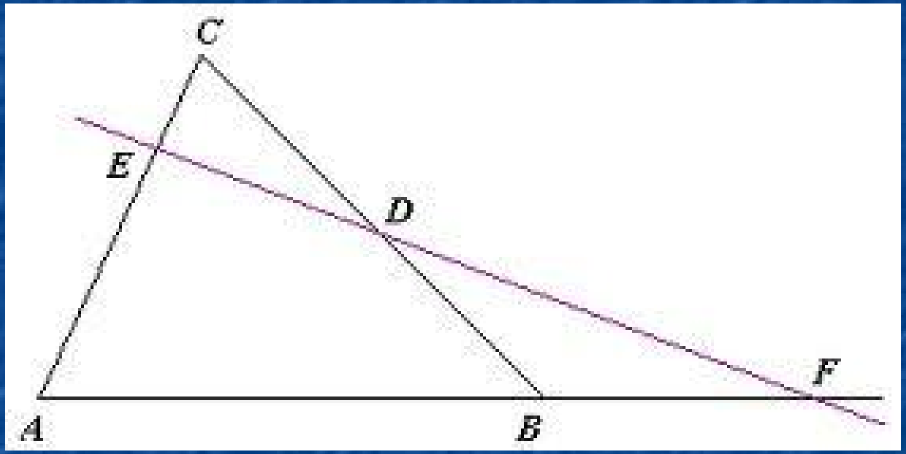
- Goniometro in cui la semicirconferenza per misurare gli archi è divisa in 180 parti (gradi) e il diametro del cerchio per misurare le corde è diviso in 120 parti.

- Ad esempio la corda di un arco di 180°(angolo piatto) è 120, la misura del diametro; la corda di un angolo di 60°(l'angolo dell'esagono regolare) è 60

Primi contributi alla trigonometria

- Ipparco da Rodi (II sec. a. c.) *prime tavole di corde*
- Teodosio da Tripoli (I sec. a.c.)
- Menelao di Alessandria (I-II sec. d.c.) *Sphaerica trad. latina dall'arabo Gherado da Cremona (XII sec.)*
-
- Claudio Tolomeo (II sec. d.c.) *Almagesto*

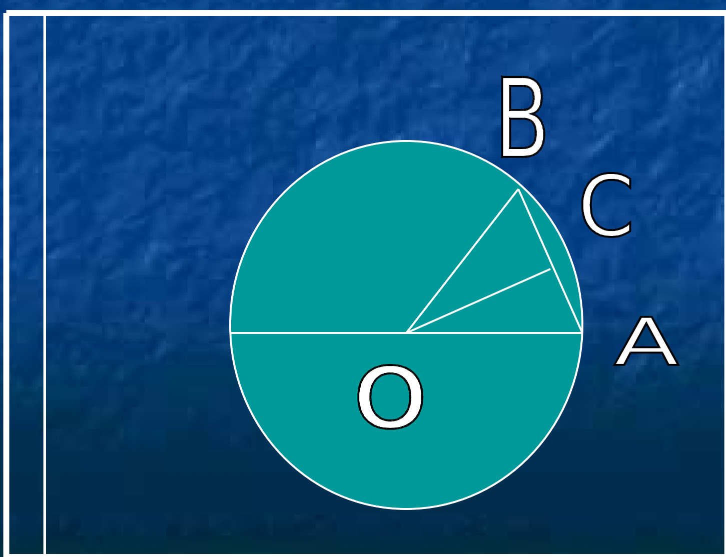
Teorema di Menelao
regula sex quantitatum



- Triangoli piani e sferici :
- Se la retta EDF incontra i lati o i prolungamenti dei lati del triangolo nei punti E, D, F allora il prodotto dei rapporti
- AE/CE; CD/DB; BF/AB
- è = -1
- (es. il rapporto AE/CE è positivo quando la retta EDF interseca il segmento AC)

Tradizione babilonese

- la semicirconferenza per misurare gli archi è divisa in 180 parti (gradi) e il diametro del cerchio per misurare le corde è diviso in 120 parti
- Approssimazione di $\pi=3$



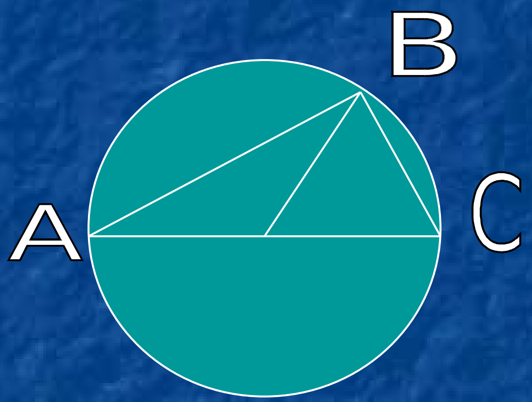
Arco/ angolo	corda
180°	120
60°	60
Arco $AB=\alpha°$	$BC=60\ \mathrm{sen}\,\alpha/2$ $AB=120\ \mathrm{sen}\,\alpha/2$ $c(\alpha)=120\ \mathrm{sen}\,\alpha/2$ $\mathrm{sen}\,\alpha=c(2\alpha)/120$

Claudio Tolomeo (II sec. d. c.)

- *Almagesto, I libro*
- Tavola delle corde di mezzo grado in mezzo grado da 1° a 180°

Risoluzione dei triangoli rettangoli

- Noti due lati col teorema di Pitagora si trova il terzo lato; per trovare gli angoli si inscrive il triangolo in una semicirconferenza di diametro uguale all’ipotenusa (=120), BC=c(2α) , dalla tavola delle corde si ricava 2 α da cui α= all’angolo CAB.

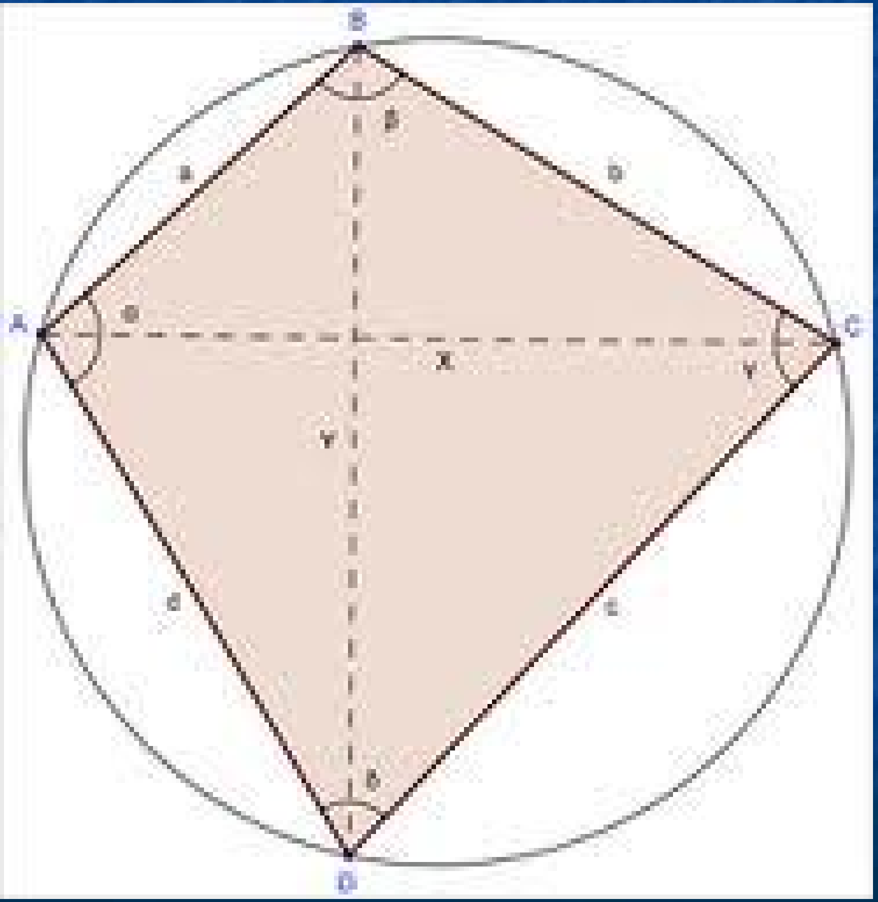


- Senza ricondurci ad avere AC=120, basterà cercare l’arco 2 α corrispondente alla corda
  BC X 120/AC

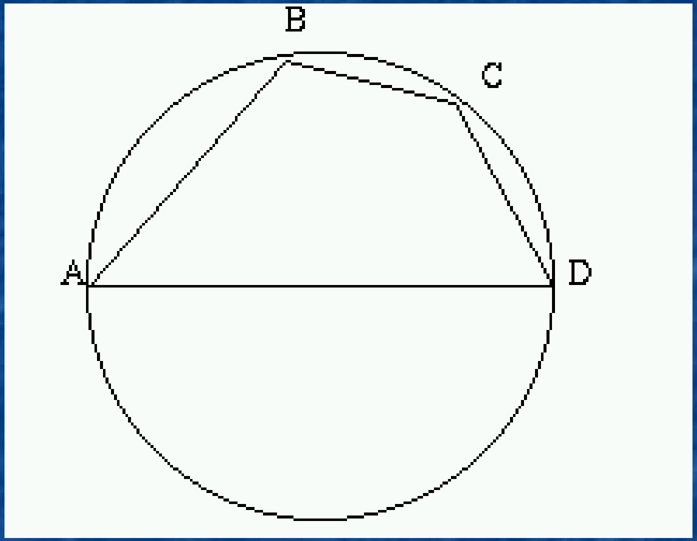
- La risoluzione dei triangoli qualsiasi era ricondotta alla risoluzione dei triangoli rettangoli

Costruzione della tavola delle corde

- Sono necessarie formule analoghe a quelle di addizione, sottrazione, bisezione.
- **Teorema di Tolomeo**: in un quadrilatero inscritto in un cerchio, il prodotto delle diagonali è uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti



Teorema di Tolomeo



- Posto Arco AB=α; Arco AC=β

Si ha Arco BC=β-α; Arco BD=180-α; Arco CD=180-β

- Per il teorema
- c(β)c(180-α)=c(α)c(180- β)+120c(β-α)

- Ricordando che c(α) =120 sen α/ 2 la formula precedente si traduce nella nota forma di sottrazione dei seni

$$\operatorname{sen}\frac{\beta-\alpha}{2}=\operatorname{sen}\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

- Analogamente si ottiene la formula di bisezione che permette di calcolare corde corrispondenti ad archi sempre più piccoli

$$c^2(\alpha) = \frac{60c^2(2\alpha)}{120 + c(180 - 2\alpha)}.$$

Arco	corda
60°	Lato dell’esagono regolare
36°	Lato del decagono regolare
72°	Lato del pentagono regolare
12°	Per differenza
6°	Bisezione
3°	Bisezione
1° 30’	Bisezione
45’	Bisezione

Tolomeo ottiene la corda di 1° per approssimazione usando il seguente risultato:

Per due archi α e β con $\alpha > \beta$ risulta

$$c(\alpha)/c(\beta) < \alpha/\beta$$

Da cui

$$2/3\ c(1°\ 30’) < c(1°) < 4/3\ c(45’)$$

Dalla corda alla mezza corda

- Il primo uso delle funzioni trigonometriche è legato alle corde di un cerchio e alla ricerca della lunghezza della corda sottesa da un dato angolo x che, in termini moderni, è uguale a

$$2 \text{ sen } (x/2)$$

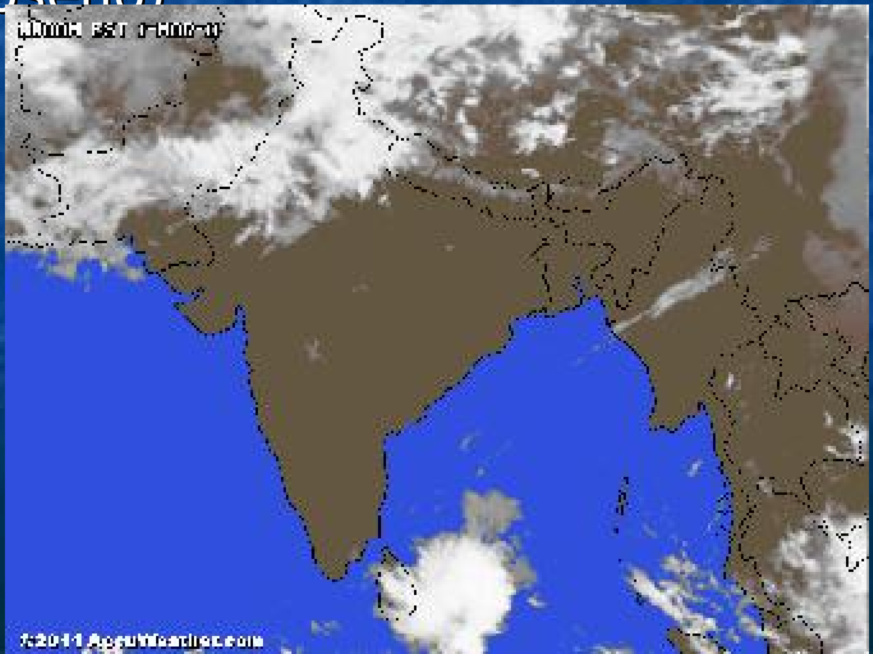
- Lo sviluppo matematico in India intorno al 500 d.c. produsse una trigonometria più vicina alla forma moderna. Dall’India l’uso della mezza corda al posto della corda

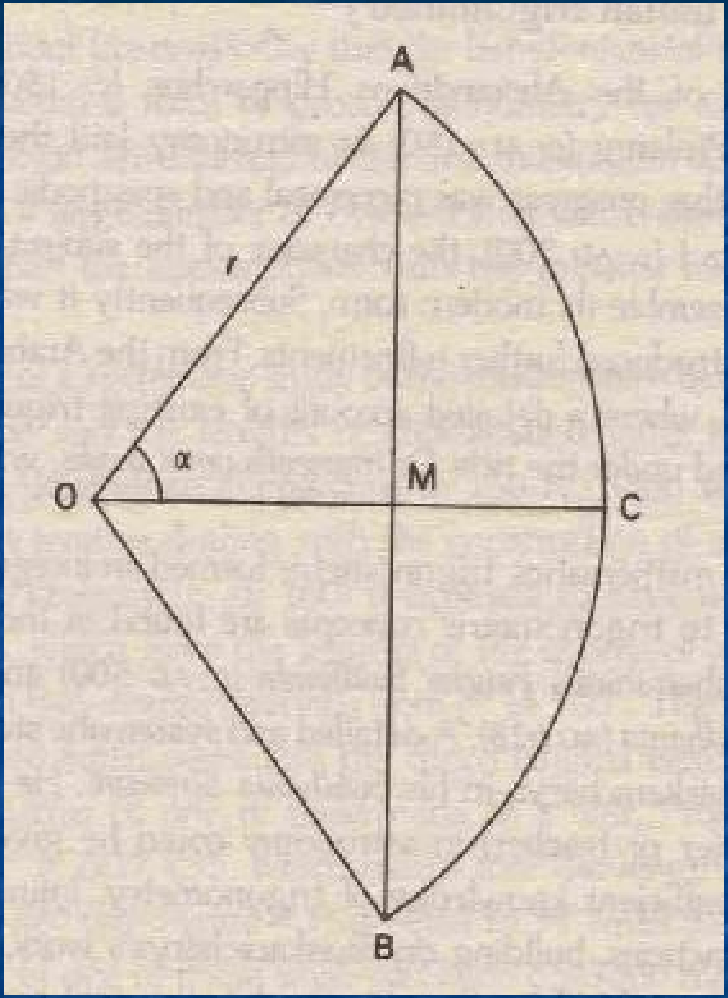
I contributi Indiani

nell’opera *Surya Siddhanta* (IV-V sec.) tavola dei seni degli angoli multipli di 3° 45’ fino a 90°

- Aryabhata diede una tavole di mezze corde note col nome di *jya-ardha* o semplicemente *jya* , dove *jya x = r senx*

- *Seno, coseno, senoverso* (1-coseno)





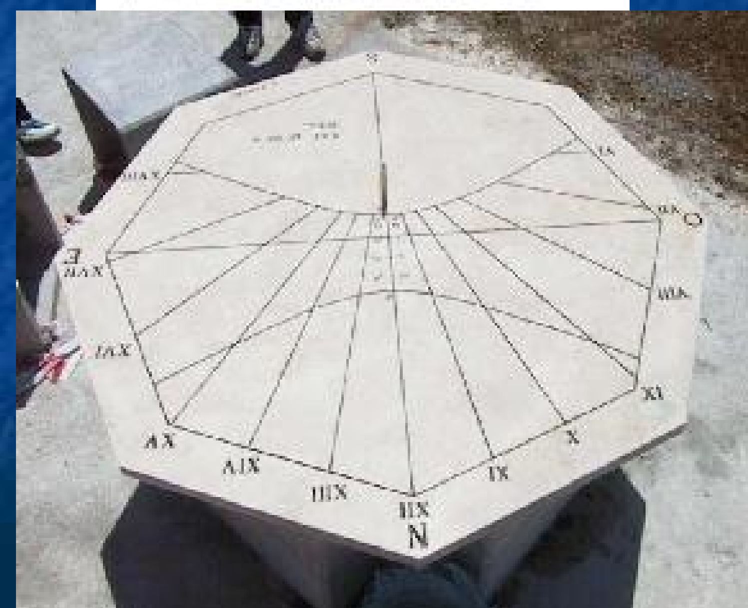
- *Jya-ardha o semplicemente jya* rappresenta in figura la mezza corda AM.

Etimologia della parola “seno”

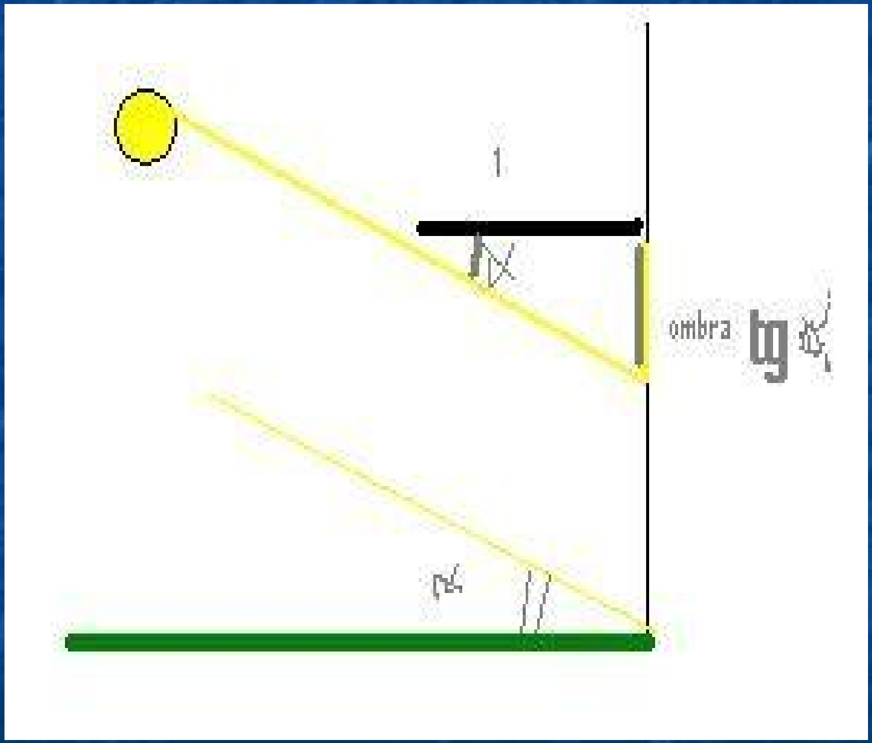
- Nell’ottavo secolo la funzione seno dall’India fu importata nel mondo arabo. Traduzioni in arabo di testi astronomici indiani a Baghdad
- Il termine sanscrito *jya* fu traslitterato e divenne *jiba* o *jb.*
- In seguito gli arabi adottarono al posto di *jiba,* parola priva di significato in quella lingua, la parola *jaib* che significa baia o rada.
- Nel XII secolo Gherardo da Cremona tradusse con la parola latina *sinus* il termine arabo *jaib*

La gnomonica

- La tangente e la cotangente sono nate nell’ambito della gnomonica, la scienza degli orologi solari, rispettivamente verticali e orizzontali.

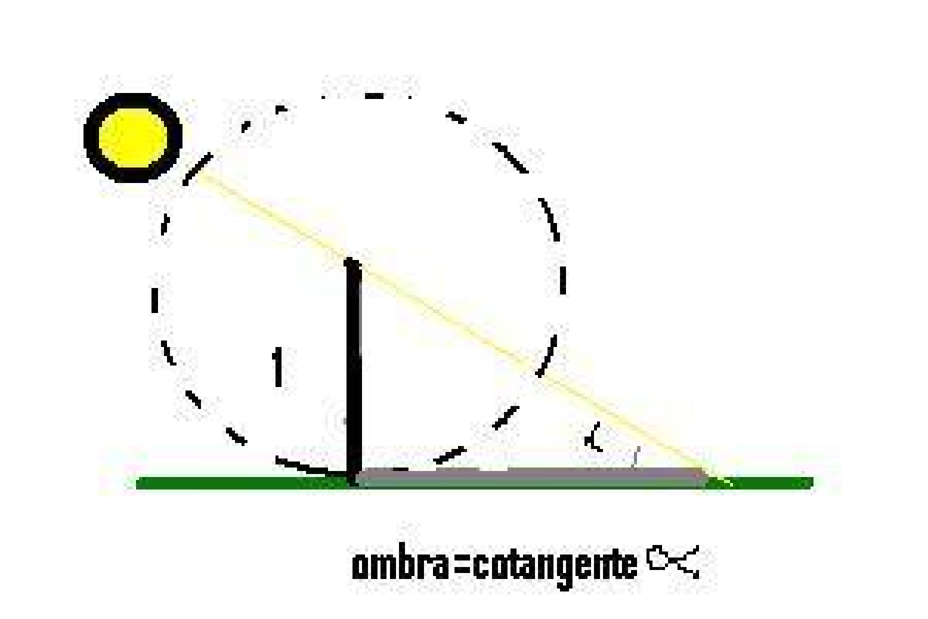


Tangente (*umbra versa*)



- l'ombra gettata sul piano verticale da uno gnomone orizzontale di lunghezza 1
- Il termine **tangente** è stato introdotto nel XVI secolo (T. Fink 1583) quello di **cotangente** nel XVII secolo (Gunter 1620)

Cotagente (*umbra recta*)



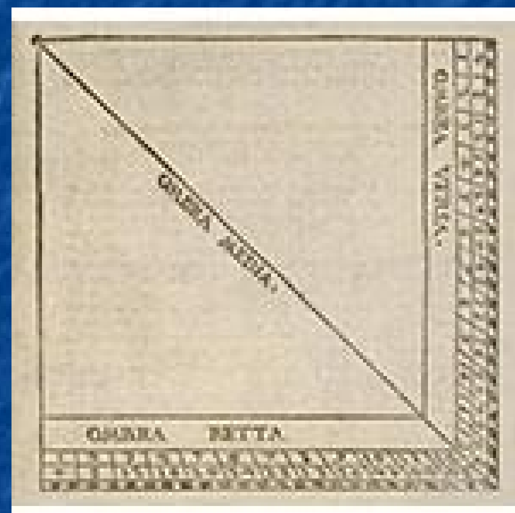
- l'ombra gettata sul piano orizzontale da uno gnomone verticale di lunghezza 1

- Nei due casi l'angolo è l'altezza del sole sull'orizzonte che poteva essere così determinato dalla lunghezza delle ombre.

Quadrato geometrico

- Porta inciso su due lati contigui il **quadrato delle ombre**. All'angolo opposto è incernierata una linda con traguardi. All'interno del telaio si trova un quarto di cerchio con la scala dei gradi e al centro una bussola con ago magnetico
- Questo esemplare, proveniente dalle collezioni medicee, è simile a quello divulgato da **Georg von Peurbach nel trattato *Quadratum geometricum*** (Norimberga, 1516).
- http://catalogo.museogalileo.it/oggetto/

Quadrato delle ombre

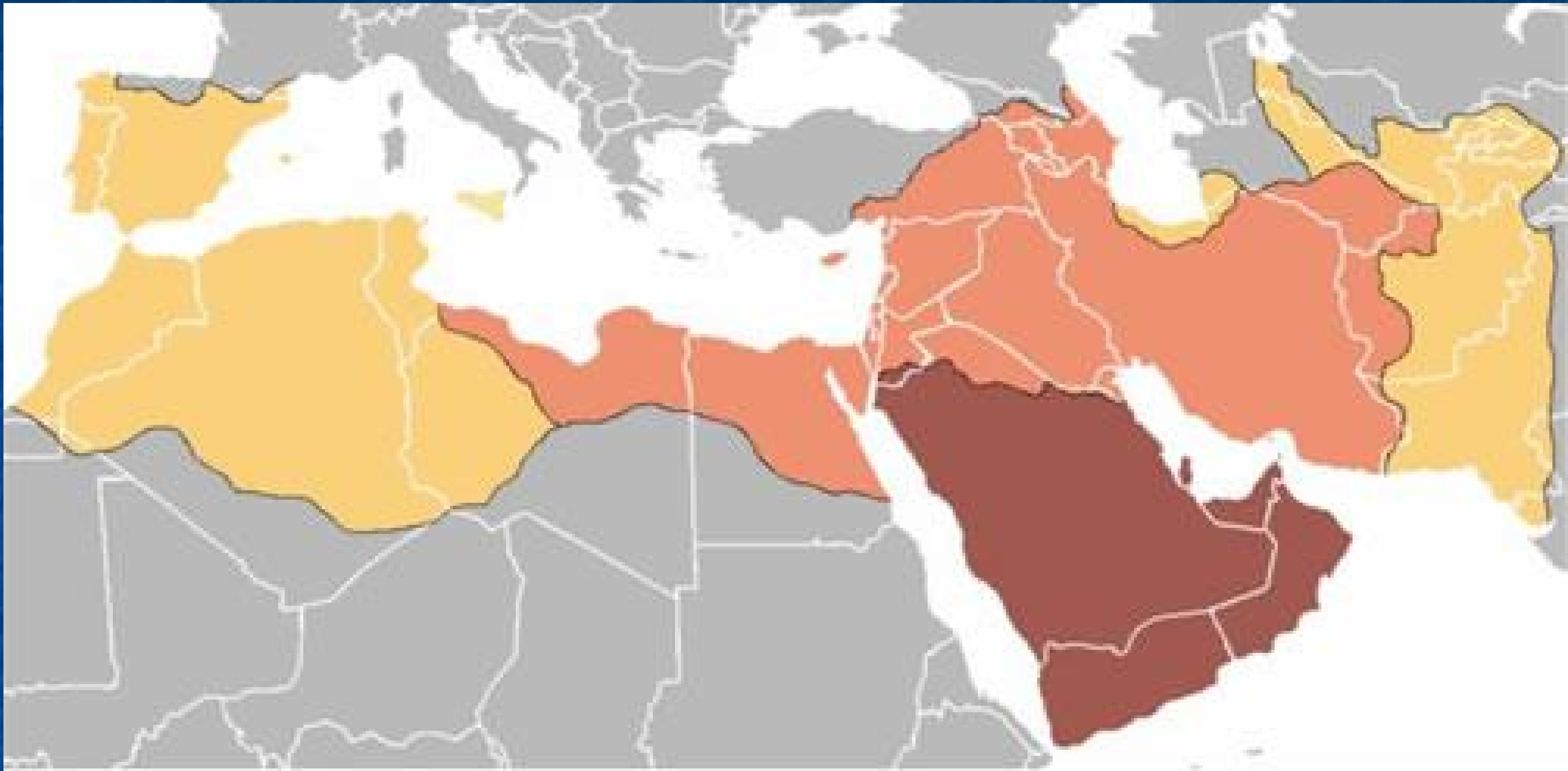


Serve a misurare altezze e distanze, simulando il rapporto tra uno gnomone e la sua ombra.

- *Umbra recta:* l'ombra gettata sul piano orizzontale da uno gnomone verticale quando il raggio del Sole è inclinato da 0° a 45°,
- *Umbra versa* : l'ombra gettata sul piano verticale da uno gnomone orizzontale quando il raggio del Sole è inclinato da 45° a 90°.

Quando il raggio è inclinato di 45°, le due ombre si equivalgono (***umbra media***).

Gli Arabi



Furthest Extent of the Arab Empire by about 750 CE.
Muhammad (622-632),
Rashidun Caliphate (632-661)
Umayyad Caliphate (661-750)

Metodo di Al-Kashi per il calcolo approssimato del sen1°

- Al-Kashi astronomo persiano del XV secolo
- Basato sulla formula che dà il seno di 3α in termini del seno di α

$$\mathrm{sen}\ 3\vartheta = 3\,\mathrm{sen}\ \vartheta - 4\,\mathrm{sen}^3\ \vartheta.$$

- Per $\theta=1°$, posto $x=\text{sen}1°$ la relazione precedente diventa

$$3x=4x^3+\text{sen}3°$$

Posto $a=\text{sen}3°$ (noto con precisione arbitraria grazie alle formule di bisezione) si tratta di risolvere l'equazione cubica

$$3x=4x^3+a$$

Se x è piccolo, $4x^3$ si può trascurare e dunque:

$x_1=a/3$ (prima approssimazione)

$3x_2=4x_1^3+a$ (seconda approssimazione)

$3x_3=4x_2^3+a$ (terza approssimazione)

Ecc.

Sviluppi in Occidente

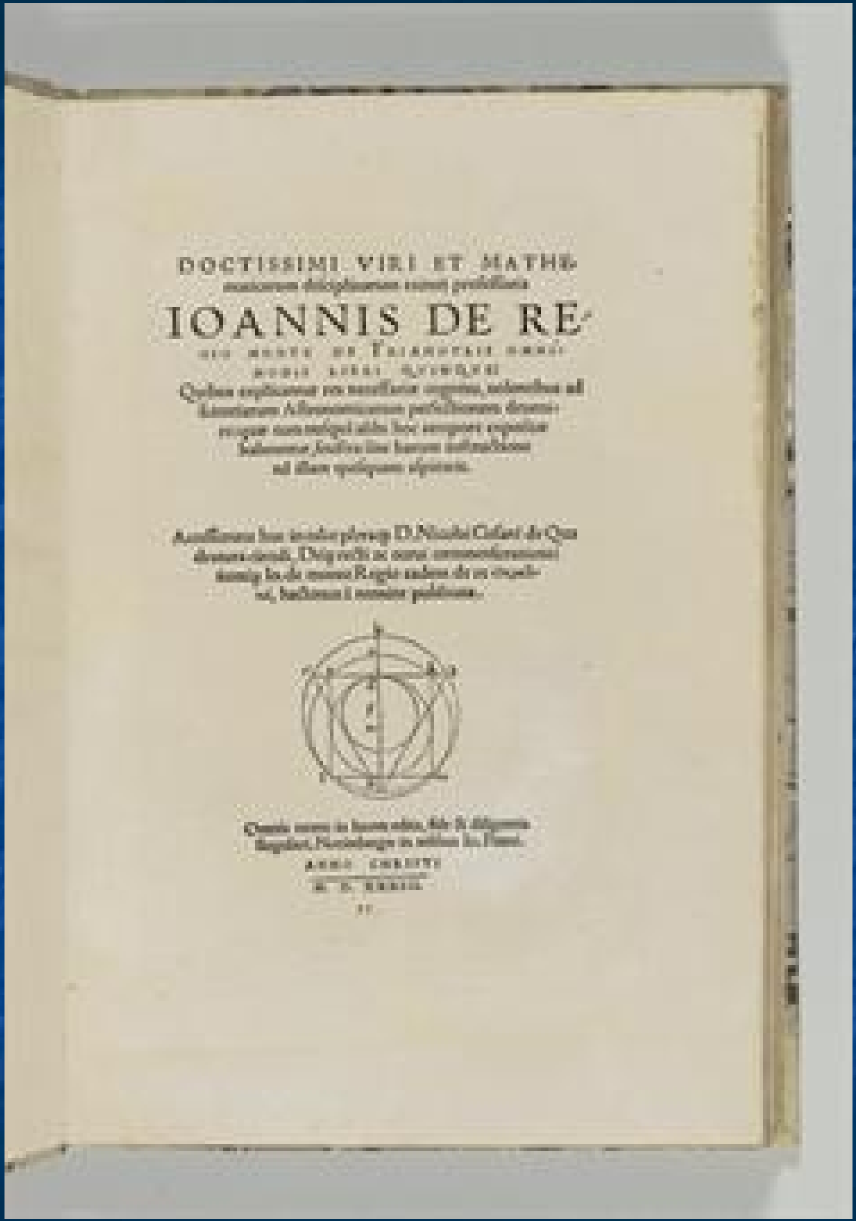
- La trigonometria giunse in Occidente soprattutto attraverso fonti arabe.
- Contributi XV sec. Astronomia Tavole dei seni per angoli a intervalli sempre minori e miglior precisione
- **Peuerbach** (1423-1461) (di 10' in 10'); **Regiomontano** (1436-1476) (di 1' in 1'); **Copernico** (1473-1543); **Retico** (1514-1577) (di 10'' in 10''); **Viéte** (1540-1603) (formule di moltiplicazione)

Topografia e primi trattati di trigonometria

- Regiomontano, *De triangulis omnimodis* (1533) ma dcritto circa nel 1464
- Copernico nel *De revolutionibus orbium caelestium* (1543)

- Il termine trigonometria appare per la prima volta nell'opera di **Bartholomaeus Pitiscus**, *Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus* (1595)


TRIGONOMETRIÆ
LIBRI QVINQVE
PROBLEMATVM
Geodæticorum,
Altimetricorum,
Geographicorum,
Gnomonicorum, et
Astronomicorum


DOCTISSIMI VIRI ET MATHE-
IOANNIS DE RE-

Tavole logaritmico-trigonometriche

John Napier (1550-1617)

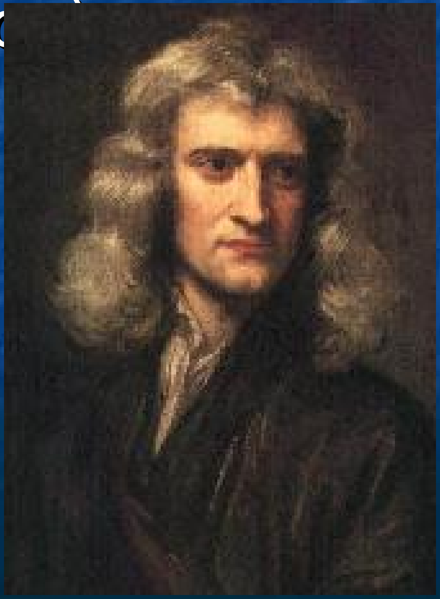
- Impulso alle tecniche trigonometriche grazie all’uso combinato delle funzioni circolari e di quelle logaritmiche.
- Es. teorema dei seni per la risoluzione dei triangoli

$$b = \frac{a \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} \alpha}$$

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} \beta - \log \operatorname{sen} \alpha,$$

Le funzioni circolari XVII secolo

- Seconda metà del XVII secolo: Curve dei seni, dei coseni, delle tangenti, ecc. e problemi connessi (tracciare la tangente, trovare l’area sottesa, il volume del solido ottenuto per rotazione ecc.)
- Invenzione del calcolo infinitesimale (Leibniz e Newto



Formule di Eulero
XVIII secolo

- inattese relazioni

$$\text{sen } \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i} \quad \cos \vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

$$\cos \vartheta + i \,\text{sen } \vartheta = e^{i\vartheta}$$

$$z = \varrho e^{i\vartheta}.$$

Trigonometria moderna

- Funzioni circolari studiate in quanto tali come parte dell’analisi matematica
- Superamento dell’uso in topografia, astronomia, navigazione sostituito da segnali radio satellitari, aerofotogrammetria, telerilevazioni, dati poi elaborati con l’uso dei calcolatori
- Progettazione delle macchine

Siti di interesse

- http://web.math.unifi.it/archimede/archime
- Leo Rogers, History of trigonometry

http://nrich.maths.org/6843&part=

http://nrich.maths.org/6853&part=

http://nrich.maths.org/6908