La nascita della geometria analitica

Massimo Galuzzi

9 marzo 2011

1 Introduzione

Lo scopo di questo intervento non è quello di fornire un contributo alla vasta letteratura dedicata a Descartes, ma, assai più modestamente, quello di fornire degli spunti per una lettura *personale* del testo della *Géométrie*, in particolare in riferimento alla geometria analitica.[1]

Un luogo comune (non privo di verità) è che la *Géométrie* di Descartes è il 'primo' testo che un lettore moderno può leggere senza una preparazione specifica. Questa affermazione va intesa nel senso che non vi sono eccessive difficoltà nel decifrare il *linguaggio simbolico* cartesiano. Altra cosa è impadronirsi dei contenuti matematici. Vediamo comunque un esempio:[2]

> **Comme cete derniere**
>
> $x^4 -- 4x^3 -- 19xx + 106x -- 120 \propto 0$
>
> **peut bien eſtre diuiſée, par x -- 2, & par x -- 3, & par x -- 4, & par x + 5; mais non point par x + ou -- aucune autre quantité. cequi monſtre qu'elle ne peut auoir que les quatre racines 2, 3, 4, & 5.**

[1] L'attualità del pensiero di Descartes è comunque resa evidente dall'attenzione continua alla riproposizione delle sue opere. Recentemente è apparsa un'edizione italiana (con il testo a fronte) curata da Giulia Belgioioso (Descartes, 2005, 2009b,c) ed è in corso d'opera una nuova edizione francese curata da J.-M. Beyssade et D. Kamboucher della quale è uscito il volume contente il *Discorso* ed i *Saggi*, (Descartes, 2009a). Le note alla *Géométrie* in questa edizione sono di André Warusfel.

[2] Cf. (Descartes, 1954, p. 161).

L'unica difficoltà è data dal fatto che anche 5 è considerato come una radice, che va qualificata con l'appellativo 'falsa' invece che indicata con -5.[3] Comunque, le differenze con la scrittura moderna sono poche e trascurabili rispetto alle differenze che si trovano con gli autori che precedono Descartes. Ecco un esempio tratto da Viète (che pure è un autore che ha segnato un enorme progresso nella storia dell'algebra, anche dal punto di vista delle notazioni):[4]

> **Proponatur A Cubus, plùs B in A Quadratum æquari Z plano in A, Dico per hypobibasmū A Quadratum, plùs B in A æquari Z plano.**

Per queste ragioni 'linguistiche' vi è anche chi ha parlato per Descartes di 'rivoluzione simbolica'.[5] Tuttavia la modernità della scrittura non deve indurre a pensare che la *Géométrie* sia un testo totalmente accessibile.

Innanzi tutto, Descartes *non* scrive la *Géométrie* avendo principalmente di mira il progresso della matematica in quanto tale. Il testo è uno dei tre saggi che accompagnano il *Discours de la méthode* e Descartes è interessato in primo luogo a mostrare l'eccellenza del suo modo di filosofare in ogni ambito disciplinare.[6]

La modalità di scrittura della *Géométrie* è quindi un dato molto significativo. Come ha mostrato Descotes (2005), Descartes scrive come "géomètre en honnête homme", utilizzando la prima persona ed usando uno stile assai diverso rispetto alle abituali trattazioni matematiche.[7]

Se poi la lettura del testo cartesiano viene effettuata avendo come modello la 'forma finale', come data, per esempio in (Briot and Bouquet, 1865) il risultato può essere piuttosto sconcertante.

---

[3] Ma altra cosa, come dicevo, sono i contenuti matematici: nel paragrafo successivo è formulata la cosiddetta 'regola dei segni', oggetto già ai tempi di Descartes di innumerevoli polemiche.

[4] Cf. (Viète, 1591, p. 8). Si veda anche (Freguglia, 1999), (Giusti, 1992).

[5] Cf. (Serfati, 2005).

[6] Anche il rapporto tra il metodo ed i saggi è un tema classico di discussione. Si può vedere, tra i testi più recenti (Cozzoli, 2008) e (Rabouin, 2009) dove è affrontato il tema della 'mathesis universalis' anche, e soprattutto, in rapporto a Descartes. Si veda anche su queste tematiche (Costabel, 1982), (Israel, 1997) e (Jullien, 2006).

[7] La *Géométrie* è comunque un testo che già richiedeva ai tempi di Descartes una lettura particolare. Descartes ha fatto tirare a parte numerosi esemplari di questo testo e li ha offerti a coloro che giudicava 'suoi pari': Jean Baptiste Chauveau, per esempio, ma non Roberval, un 'matematico professionale'.

> Tutti coloro, a cui punse vaghezza di conoscere l'opera donde comincia la letteratura relativa al metodo delle coordinate, provano una insormontabile delusione; ché *La géométrie* di Descartes differisce da un trattato moderno di geometria analitica infinitamente più di quanto si differenzino due esposizioni, l'una antica e l'altra moderna, di qualunque altra disciplina matematica. Chi poi da tal fatto è spinto ad investigare la evoluzione di quel ramo dello scibile, cozza contro assai gravi difficoltà, cagionate specialmente da due fatti. Il primo è che Descartes [...] considerò la novella disciplina siccome una semplice metamorfosi prodotta nella geometria degli antichi dall'influenza dell'algebra, poco dianzi trasferitasi dall'Italia alla Francia; onde presentasi spontaneo il paragone dell'autore del *Discours de la méthode* con Cristoforo Colombo, sceso nella tomba nell'ignoranza d'aver scoperto un nuovo mondo.[8]

Accanto a queste affermazioni, piuttoste ingenue, si possono porre, per contrasto, molti saggi recenti i quali evidenziano la novità profonda introdotta dal concetto di *curva algebrica* portato in primo piano dal testo cartesiano.[9] È soprattutto su questo aspetto che mi soffermo nelle pagine seguenti tralasciando, per ragioni di brevità, altre tematiche di enorme rilievo, quali il metodo per le tangenti o la 'teoria delle equazioni', oggetto dell'intero terzo libro.

2 L'inizio della *Géométrie*

L'inizio del testo cartesiano è molto famoso:

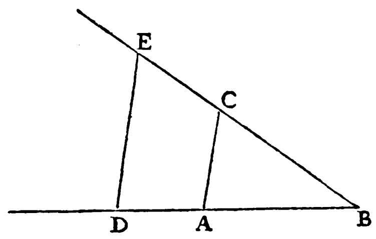
> Tutti i problemi di geometria si possono facilmente ridurre a termini tali che poi, per costruirli, vi sia bisogno soltanto di conoscere la lunghezza di alcune linee rette.[10]

[8](Loria, 1923, p. 777). La seconda ragione fornita da Loria è il nuovo sole del calcolo differenziale.

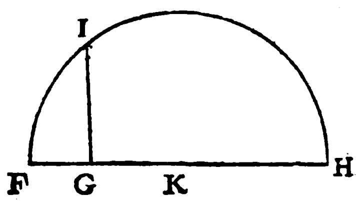
[9]Si veda per esempio (Giusti, 1990), (Giusti, 1999). Più cauto nella ricerca della novità della *Géométrie* è certamente Bos. Comunque (Bos, 2001) è un testo molto importante. Tra gli innumerevoli saggi e libri apparsi recentemente mi limito a segnalare (Rashed, 2005a). (Rashed, 2005b) e (Sasaki, 2003).

[10]Utilizzo la recente edizione delle opere di Descartes di Giulia Belgioioso, (Descartes,

Descartes spiega poi "come il calcolo in aritmetica si rapporta a operazioni di geometria".[11] La *somma* e la *differenza* si calcolano in modo ovvio. Ecco poi come viene ottenuto il *prodotto* di due segmenti BD e BC, una volta che si sia scelto un *segmento unitario* AB.



Dopo aver disposto i segmenti AB, BD, DC come in figura, si tratta evidentemente di utilizzare il 'teorema di Talete'. L'estrazione di radice è altrettanto semplice. Se GH è il segmento per il quale si deve ottenere la radice, si tratta di scegliere ancora una volta il segmento unitario FG e produrre la figura seguente.



Tuttavia, osserva Descartes, "sovente non c'è necessità di tracciare in questo modo tali linee sulla carta, ed è sufficiente indicarle tramite lettere, ciascuna con una sola lettera".[12] Così, per esempio, nella soluzione di un dato problema possiamo incontrare una espressione come $\sqrt{a^2 + b^2}$ senza che sia necessario esibire la figura di un triangolo rettangolo di cateti a e b.

2009c), che riporta accanto al testo francese la traduzione italiana. Il passo citato si trova a p. 493. Ho utilizzato anche la recente edizione francese, (Descartes, 2009a) ed ho tenuto conto delle note di André Warusfel.

[11]Ibidem.

[12]Ibidem, p. 495.

In queste poche pagine iniziali si evidenzia un modo radicalmente nuovo di fare matematica: l'algebra acquisisce una netta posizione di predominio.[13] Tuttavia, per cogliere appieno questa novità è necessaria una certa preparazione storica. Il lettore moderno, non più abituato alle tematiche della geometria classica e addestrato all'uso dell'algebra, non trova certo difficoltà ad immaginare $a, a^2, a^3, \dots$ come quantità della stessa natura. Anzi: tende a giudicare tutto ciò come un dato ovvio. Naturalmente non è possibile trasformarsi in un lettore contemporaneo della *Géométrie*, ma è ragionevole compiere uno sforzo per collocarla storicamente.[14]

Nella sezione seguente vedremo il caso della soluzione dell'equazione di secondo grado come presentata da Descartes. Si noterà la stretta correlazione con l'algebra.

2.1 L'equazione di secondo grado: verso il predominio dell'algebra

Mi limito a proporre l'esempio più interessante, quello di un'equazione di secondo grado che può avere due radici positive (o essere priva di radici). L'equazione di secondo grado da considerare (poiché possiamo usare solo quantità positive), ha la forma

$$z^2 = az - b^2 \tag{1}$$

Descartes fornisce la figura seguente (che ho completata con le linee tratteggiate), per la quale $LM = b$ e $LN = \frac{a}{2}$

[13]Certamente Descartes ha scritto una *Géométrie*, non volendo allontanarsi troppo, almeno in questo campo, dalla tradizione. Ma assai spesso nella corrispondenza si riferisce alla 'sua algebra'.

[14]In qualche senso, un percorso didattico, con studenti che non abbiano ancora acquisito familiarità con l'algebra può paragonarsi ad un percorso storico.

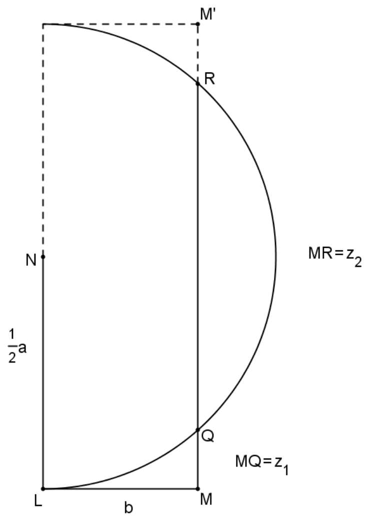


Figura 1: L'equazione di secondo grado: due radici positive

Le due radici sono date da $z_1 = MQ$, $z_2 = MR$. Evidentemente $MQ + MR = a$, mentre $MQ \cdot MR = b^2$. Naturalmente è facile verificare che

$$z_1 = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}, \quad z_2 = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}, \tag{2}$$

ma sembra più naturale supporre che Descartes abbia semplicemente utilizzato direttamente le identità

$$z_1 + z_2 = a, \quad z_1 z_2 = b^2, \tag{3}$$

adattandole alla figura geometrica più semplice possibile.

3 Il problema di Pappo: le coordinate...

Un problema importante, risolto nella *Géométrie* è solitamente indicato come quello dove vengono introdotte le 'coordinate cartesiane'. Si tratta del 'problema di Pappo'. Nel caso di quattro rette, il problema si può formulare nel modo seguente:[15]

[15] Si veda anche la Nota 7 in (Giusti, 1999) e il Capitolo 23 in (Bos, 2001).

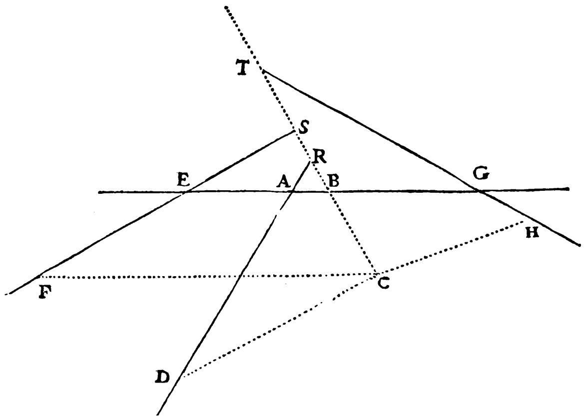


Figura 2: Il problema di Pappo per 4 rette

Le rette tracciate in neretto nella figura sono *date in posizione*.[16] Si vuol trovare un punto, come C, per il quale, avendo tirato delle altre linee rette su quelle date, CB, CD, CF, CH, di modo che anche gli *angoli* CBA, CDA, CFE, CHG siano *dati*, sia

$$CB \times CD = k \times CF \times CH, \tag{4}$$

dove k è una costante assegnata. Descartes inizia con l'osservare che la posizione del punto C è individuata quando conosciamo $AB = x$ e $BC = y$. Le quantità (positive) x ed y sono sufficienti, perché la retta AB ed il punto A sono *dati* e l'angolo ABC (ed il suo complementare) è *dato*.

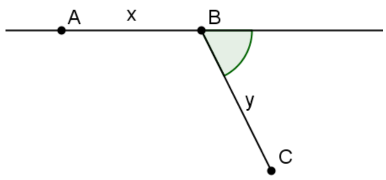


Figura 3: Le coordinate

[16]Nel senso dei *Dati* euclidei, un testo molto importante nella matematica del Seicento.

Assegnate queste quantità, possiamo conoscere ognuna delle linee (segmenti) rimanenti CF, CD, CH. Vediamo il calcolo per CF. Gli angoli del triangolo CSE e gli angoli del triangolo CSF sono noti, e quindi sono noti anche i rapporti tra i lati. Il segmento AE è dato.

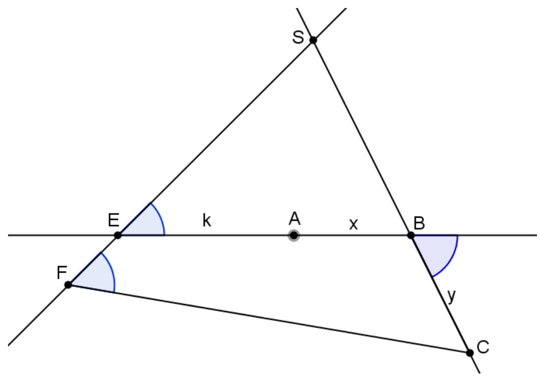


Figura 4: La distanza di un punto da una retta (secondo un angolo dato)

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
BE : BS &= z : d, \\
BS &= \frac{d}{z}(k + x), \\
CS &= y + \frac{d}{z}(k + x) = \frac{zy + dk + dx}{z}, \\
CS : CF &= z : e, \\
CF &= \frac{ezy + dek + dex}{z^2}.
\end{aligned}$$

Descartes osserva sbrigativamente che ogni distanza è data da una espressione della forma

$$\pm Ax \pm By \pm C \quad [17] \tag{5}$$

ove i segni possono variare in tutti i modi possibili, compatibilmente con il fatto che vi sia sempre almeno una quantità positiva.

[17] Naturalmente, come osserva Descartes, a seconda della posizione di C si può anche avere $\frac{zy-dk-dx}{z}$ oppure $\frac{-zy+dk+dx}{z}$. Osservazioni simili si possono ripetere anche per i calcoli successivi.

La soluzione del problema di Pappo è una 'avventura algebrica' che segna definitivamente l'inizio della modernità.[18]

Descartes ha la pazienza di osservare che

$$CB = y, \quad CD = \frac{czy + bcx}{z^2},$$

$$CF = \frac{ezy + dek + dex}{z^2}, \quad CH = \frac{gzy + fgl - fgx}{z^2},$$

di modo che si ha (supponendo semplicemente che sia $CB \times CF = CD \times CH$)

$$y^2 = \frac{(cfglz - dekz^2)y - (dez^2 + cfgz - bcgz)xy + bcfglx - bcfgx^2}{ez^3 - cgz^2}. \tag{6}$$

Ma poiché tutte le quantità ed i loro segni possono variare arbitrariamente, e Descartes non si cura di analizzare in dettaglio tutte le possibili situazioni, possiamo ridurci a studiare un'equazione della forma

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}. \tag{7}$$

Descartes ha compiuto qui un'operazione che molti suoi contemporanei giudicheranno severamente. Vi è una sorta di distacco dai dati geometrici che sembrano ridursi ad una sorta di pretesto per studiare semplicemente cosa rappresenti un'equazione della forma (7).

Ancor più evidenti sono i 'segni della modernità' nel cambiamento di coordinate introdotto a questo punto. In termini moderni, esso si riassume in

$$\begin{cases} \frac{a}{z}x = X \\ y - m + \frac{n}{z}x = Y \end{cases} \tag{8}$$

È tuttavia interessante seguire più esattamente l'argomento di Descartes. La figura seguente è 'estrapolata' dal testo cartesiano.

[18] In realtà la soluzione nel caso delle quattro rette che io presento in modo unitario è suddivisa tra il primo ed il secondo libro. Nel primo libro viene indicato come si procede in generale per calcolare tutte le distanze nel caso generale; nel secondo si esamina in particolare il caso del problema per quattro rette.

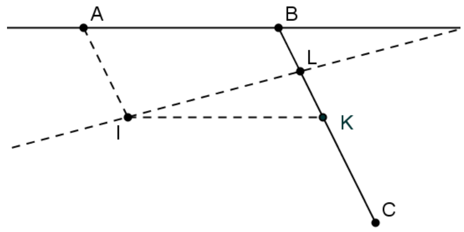


Figura 5: Le nuove coordinate

Sia $BK = m$, IK sia una linea parallela ed uguale ad $AB = x$. Se IL è tale che $IK : KL = z : n$, ossia se $KL = \frac{n}{z}x$, si ha $LC = y - m + \frac{n}{z}x$, e Descartes può scrivere

$$LC = \sqrt{m^2 + ox + \frac{p}{m}x^2}. \tag{9}$$

La posizione del punto C è ora data nei termini di $AB = x$ e LC. Ma IL è un diametro della sezione conica (in generale), come Descartes sa perfettamente, tanto che si dà cura di esplicitare il rapporto tra IL e AB, che pone uguale a $\frac{a}{z}$. Se ci concediamo una piccola forzatura, ponendo $IL = X = \frac{z}{a}x$, l'equazione diviene, nei termini di LC=Y ed IL,

$$Y = LC = \sqrt{m^2 + o\frac{z}{a}X + \frac{p}{m}\frac{z^2}{a^2}X^2}. \tag{10}$$

Ma Descartes evita con cura questa scrittura, accontentandosi della (9), anche se poi indica esattamente il centro della sezione conica alla distanza $\frac{aom}{2pz}$ (da considerarsi con il segno opportuno): la semisomma (astrazion fatta del segno) delle radici dell'equazione che corrisponde alla quantità sotto il radicale di (10).

Nei termini dell'equazione (9) (o dell'equazione 'latente' (10)) Descartes indica poi rapidamente le caratteristiche delle soluzioni. Per esempio, se $\frac{p}{m} = 0$ la soluzione è una parabola per la quale il lato retto è $\frac{oz}{a}$ (il coefficiente di X nella (10), ed il vertice è il punto N tale che $IN = \frac{am^2}{oz}$ (la radice, a meno del segno di $m^2 + o\frac{z}{a}X = 0$).

Non importa seguire tutti i dettagli. Ciò che è rilevante è il fatto che Descartes, ricollegandosi esplicitamente alle proposizioni 11,12, 13 delle *Coniche* di Apollonio interpreta le proprietà caratteristiche espresse da queste proposizioni come atte a *definire*, mediante equazioni, le sezioni coniche. Di qui in poi lo studio delle sezioni coniche è semplicemente lo studio di un'equazione di secondo grado in due variabili e di come quest'equazione definisca una *curva piana*.

Tuttavia i contemporanei (Roberval, Beaugrand, Étienne Pascal, ecc.) non mostravano molto entusiasmo per la soluzione di Descartes.[19] Innanzi tutto, il distacco dai dati geometrici, che noi salutiamo come l'inizio della teoria delle curve algebriche, per le quali le proprietà geometriche vengono stabilite a partire dall'equazione (e non viceversa), era davvero troppo brusco per i contemporanei. Quali caratteristiche legate alla posizione delle rette ed agli angoli si riflettono sulla conica soluzione? Una caratteristica evidente è sfuggita anche a van Schooten, l'allievo prediletto di Descartes autore, delle figure della *Géométrie*.[20]

Nell'esempio numerico dato da Descartes, la soluzione, ponendo (con riferimento alla figura seguente)

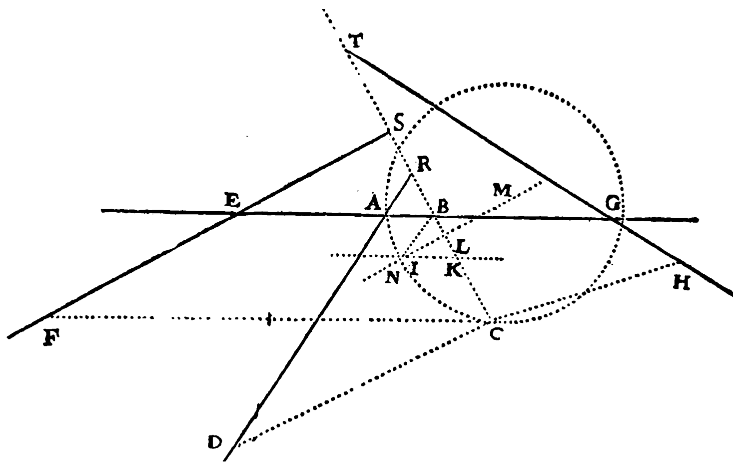


Figura 6: La soluzione in un caso numerico

$EA = 3, AG = 5, AB = BR, BS = \frac{1}{2}BE, GB = BT, CD = \frac{3}{2}CR, CF = 2CS, CH = \frac{2}{3}CT$, supponendo che l'angolo ABR sia di 60 gradi e che debba

[19]E Newton dedicherà un'intera sezione dei suoi *Principia* per offrire una soluzione da contrapporre alla 'falsa' soluzione di Descartes.

[20]E, soprattutto, il curatore della prima e della seconda edizione latina, arricchite, in particolare la seconda, di commenti molto importanti suoi e di studiosi ed allievi suoi.

essere $CB \times CF = CD \times CH$ è, come si osserva facilmente, un cerchio che deve passare per A, G e per i punti di intersezione delle rette AD ed EF e delle rette GH ed EF (che non sono indicati nella figura).[21] Nella figura tracciata da van Schooten il cerchio visibilmente non passa per G.

Ma non è solo il fatto che nel caso del problema di Pappo per quattro rette vi siano quattro punti evidenti per i quali la sezione conica deve passare, e che Descartes trascura, a destare le obiezioni dei contemporanei. Vi è il fatto, assai più grave, della necessità di fornire *due* soluzioni, determinate dalla scelta della regione iniziale ove collocare i punti C.

Esaminiamo la questione in termini moderni: la distanza di un punto $C = (x_0, y_0)$ da una retta, rappresentata, con le abituali convenzioni, dall'equazione $ax + by + c = 0$ è data da $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. La considerazione della distanza secondo un certo angolo si limita ad introdurre un fattore costante. Ovviamente punti simmetrici rispetto alla retta hanno la stessa distanza. Ne segue che, se formuliamo il problema di Pappo in termini moderni, abbiamo un'uguaglianza del tipo

$$|A_1x+B_1y+C_1||A_2x+B_2y+C_2| = k\cdot|A_3x+B_3y+C_3||A_4x+B_4y+C_4|, \quad (11)$$

ossia, togliendo i moduli

$$f(x,y) = \pm k \cdot g(x,y) \quad (12)$$

ove f e g sono polinomi di secondo grado nelle variabili x, y e la scelta dei segni corrisponde ad una regione del piano dove si trovi inizialmente il punto C. Abbiamo dunque *due* soluzioni possibili.

4 Analisi, sintesi e la geometria analitica

Vi è una ininterrotta (e ragionevole) tradizione storiografica che vede nell'opera di Descartes (e di Fermat) l'origine della geometria analitica.[22] L'aggettivo 'analitico' rinvia naturalmente alla classica tematica della analisi e della sintesi, ed un brano famoso del testo della *Géométrie* sembra proporre il compito del matematico nel risolvere i problemi come essenzialmente confidato all'analisi, compiuta in termini algebrici.

[21] I quattro punti danno luogo ad un quadrilatero intrecciato, che desterà le ire di Newton.

[22] Mi limito a citare due testi assai famosi: (Boyer, 1956), (Vuillemin, 1960).

> Volendo dunque risolvere un problema, si deve innanzitutto considerarlo come già risolto, e attribuire dei nomi a tutte le linee che si reputano necessarie per costruirlo, sia a quelle incognite sia alle altre. Poi, senza fare alcuna differenza fra linee note ed incognite, si deve affrontare la difficoltà secondo quell'ordine che più naturalmente di tutti mostra come esse dipendono mutualmente le une dalle altre, finché non si sia trovato il mezzo per esprimere una stessa quantità in due maniere: e questo è ciò che si chiama un'equazione, poiché i termini di una di queste due maniere sono uguali a quelli dell'altra. E si devono ricavare tante equazioni di questo tipo quante sono le linee supposte come incognite. Oppure, se non se ne ottengono altrettante e nonostante ciò non si è trascurata nessuna delle condizioni richieste dal problema, ciò significa che il problema non è interamente determinato. E in tal caso si possono prendere a piacere linee note per tutte le incognite alle quali non corrisponde nessuna equazione.[23]

Se si immagina la situazione ideale ove si è ottenuto il giusto numero di equazioni, una volta che si sia indicato una volta per tutte il modo con il quale le equazioni vanno risolte, attraverso l'intersezione delle 'curve più semplici possibili',[24] si può immaginare di eseguire la costruzione geometrica del problema a ritroso, percorrendo idealmente i passi della sintesi.[25] Questo almeno per i problemi determinati.[26]

La questione della analisi e della sintesi, già nell'antichità era piuttosto controversa.[27] Indubbiamente il testo di Descartes citato poco sopra ha un'evidente somiglianza con l'inizio del Libro VII delle *Collezioni* di Pappo.[28] Tuttavia l'interesse di Descartes sembra arrestarsi soprattutto alla descrizione qualitativa iniziale, mentre le pagine dedicate ai porismi,[29] che sviluppano

[23] Cf. (Descartes, 2009b, p. 497).

[24] È una questione molto importante, che tuttavia tralascio.

[25] Esemplare di questo modo di procedere è l'opera di Ghetaldi, un allievo di Viète. In questa direzione certo si muove van Schooten in (Schooten, 1661).

[26] Si veda (Bos, 2001, pp. 287-9) e (Guicciardini, 2009, pp. 40, 41; 49-53).

[27] Si rammenti che Pappo è un autore molto tardo, ed è opinabile che egli condivida le stesse idee degli autori prcedenti. Si veda anche la lunga discussione condotta da Acerbi in (Euclide, 2007, pp. 439-554).

[28] Cf. (Pappus, 1982, p. 477).

[29] Ben diverso l'atteggiamento di Newton: cf. (Galuzzi, 2010) e (Guicciardini, 2009, Capitolo 5).

per altro una tematica strettamente connessa ai 'problemi di luogo' viene trascurata. L'attenzione rivolta alle pagine dedicate da Pappo al problema delle n rette è manifesta per ogni lettore della *Géométrie*.[30] Tuttavia Descartes ha cura di dichiarare che la sua soluzione in termini algebrici è ben più soddisfacente di quella attribuita da Pappo agli antichi nel caso di 3 o 4 rette[31] e soprattutto è in grado di potersi generalizzare al caso di n rette. In altre parole, non è tanto l'analisi, più o meno assimilata all'algebra, che Descartes pone in evidenza, quanto la potenza dello strumento algebrico.

Ed è proprio l'uso essenziale dello strumento algebrico che, anche in in problema assolutamente determinato, rende piuttosto problematico parlare di analisi e sintesi.

4.1 Il problema del quadrato

Nel libro terzo, Descartes considera il problema, che in termini moderni si può formulare come segue: data un'equazione di quarto grado, ridotta alla forma

$$x^4 + p\,x^2 + qx + r = 0, \tag{13}$$

come possiamo sapere che, con l'aggiunta di un opportuno radicale quadratico, essa si possa riscrivere nella forma del prodotto di due polinomi di secondo grado eguagliati a zero? Descartes introduce la sua celebre risolvente

$$y^6 + 2p\,y^4 + (p^2 - 4r)y^2 - q^2 = 0, \tag{14}$$

ed osserva che una radice y di essa permette di scrivere

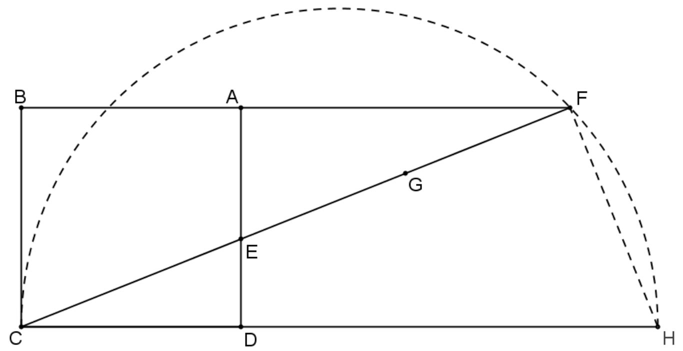
$$\begin{aligned} &x^4 + px^2 + qx + r = \\ &= \left(x^2 - yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p - \frac{q}{2y}\right)\left(x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}p + \frac{q}{2y}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Se dunque possiamo ottenere una radice y della (14) nella forma di una radice quadrata di un'opportuna quantità, il problema corrispondente all'equazione (13) è piano, ossia risolubile con riga e compasso.

Descartes applica tutto ciò al problema del quadrato.

[30] Cf. (Descartes, 2009b, pp. 502-509).

[31] Ibidem, p. 507



Si tratta di inclinare una semiretta per il vertice C in modo che il segmento EF, ottenuto intersecando il lato AD ed il prolungamento del lato BA abbia una *lunghezza assegnata*. Posto $ED = x$, Descartes ottiene facilmente l'equazione

$$x^4 - 2\,ax^3 + \left(2\,a^2 - c^2\right)x^2 - 2\,a^3x + a^4 = 0, \tag{16}$$

la quale ridotta alla forma (13) diviene

$$x^4 + \left(\frac{1}{2}\,a^2 - c^2\right)x^2 - \left(ac^2 + a^3\right)x - \frac{1}{4}\,a^2c^2 + \frac{5}{16}\,a^4 = 0. \tag{17}$$

La risolvente che si associa è

$$y^6 + \left(a^2 - 2\,c^2\right)y^4 - \left(a^4 - c^4\right)y^2 - a^2\left(a^2 + c^2\right)^2 = 0.$$

la quale ha la radice evidente $y = \sqrt{a^2 + c^2}$, il che permette di scrivere al posto della (17)

$$\left(x^2 - \sqrt{a^2 + c^2}x - \frac{3a^2 - 2a\sqrt{a^2 + c^2}}{4}\right)\left(x^2 + \sqrt{a^2 + c^2}x + \frac{3a^2 + 2a\sqrt{a^2 + c^2}}{4}\right) = 0.$$

Inutile proseguire con i dettagli che conducono evidentemente alla determinazione della radice opportuna (il cui valore sia compreso tra 0 ed a) mediante soli radicali quadratici. La domanda che mi pare importante invece è: come si inquadra tutto ciò in termini di analisi e sintesi?[32]

[32] Per questo motivo mi sembra che l'interpretazione di Bos delle procedure cartesiane, pur in un libro molto significativo come (Bos, 2001), non sia sempre totalmente convincente.

La questione diviene anche più complessa quando analisi e sintesi sono collegate ai problemi indeterminati, ossia ai problemi di luogo. Infatti algebra, analisi e sintesi sembrano mescolate in maniera non facilmente comprensibile in una celebre lettera del marzo 1638, ove Descartes discute la propria soluzione del problema di Pappo nel caso di 4 rette.

> Circa i luoghi solidi, è facile ampliare ciò che ne ho scritto. Li illustro, infatti, solo in un corollario che contiene esattamente 11 righe, vale a dire le ultime due della pagina 334 e le prime nove della seguente. Le sei o sette righe che seguono servono per i luoghi *che vengono chiamati lineari e piani*. Infatti, includo nella questione di Pappo tutto ciò che bisogna ancora conoscere per intenderli. Il bello è, a riguardo di tale questione di Pappo, che io ho dato solo[33] la costruzione e l'intera dimostrazione, senza dare tutta l'analisi, mentre essi immaginano che vi abbia dato solo questa, mostrando così di intendere ben poco.[34] Ma quello che li inganna è che faccio la costruzione, come gli architetti fanno gli edifici, prescrivendo solamente tutto ciò che si deve fare, e lasciando il lavoro manuale a falegnami e muratori.[35]

Poco oltre viene ribadito il protagonismo dell'equazione finale.

> Ora con questa sola equazione della pagina 326, vale a dire
>
> $$y = m - \frac{nx}{z} + \sqrt{m^2 + ox - \frac{p}{m}x^2} \tag{18}$$
>
> cambiando solo i segni + e −, o prendendo alcuni termini per nulli, comprendo tutte quelle che possono essere ricondotte a qualche luogo piano o solido.[36]

Descartes, nel presentare la sua soluzione del problema di Pappo come una sintesi, intende probabilmente che l'equazione (18) sia tutto ciò che occorre per costruire la soluzione generale. Ma non sembra che i termini analisi e sintesi siano facilmente collegabili alla sua soluzione, o almeno non nei termini classici. Forse con analisi si potrebbe intendere l'esame minuto di tutte le

[33] Ho corretto un errore evidente nella traduzione

[34] Meglio una traduzione più fedele: "con il che essi *testimoniano* di intendere ben poco".

[35] Cf. (Descartes, 2005, p. 617).

[36] Ibidem.

possibili configurazioni, specificando per ognuna di esse come si ottenga, una volta scelta una regione del piano, la sezione conica soluzione.[37] Mentre la sintesi sarebbe allora il riassumere il tutto in una singola equazione. Si tratta, ovviamente, di ipotesi speculative. Ciò che appare evidente è che la nascente geometria è analitica si presenta come una disciplina che non può ridursi ai termini della geometria classica. Si tratta, in fondo, di una banalità. L'uso dell'algebra ha cambiato radicalmente la matematica.

[37] Come si dice abbia fatto Pascal.

Riferimenti bibliografici

G. Belgioioso, G. Cimino, P. Costabel, and G. Papuli, editors. *Descartes: il metodo e i Saggi. Atti del Convegno per il* 350^o *anniversario della pubblicazione del* Discours de la métode *e degli* Essais, Roma, 1990. Istituto della Enciclopedia Italiana.

H. J. M. Bos. *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Springer, New York etc., 2001.

C. B. Boyer. *History of analytic Geometry.* Scripta Mathematica, New York, 1956.

C. A. A. Briot and J.-C. Bouquet. *Leçons de géométrie analytique.* F^d Tandou et C^{ie}, Paris, 1865.

P. Costabel. *Démarches originales de Descartes savant.* Vrin, Paris, 1982.

D. Cozzoli. *Il metodo di Descartes.* Quodlibet, Macerata, 2008.

R. Descartes. *Geometria à Renato Descartes anno 1637 Gallice edita; postea autem Unà cum Notis Florimondi De Beaune [...]. Operâ atque Studio Francisci à Schooten[...].* Apud Ludovicum & Danielem Elzevirios, Amstelædami, 1659–61.

R. Descartes. *The Geometry of René Descartes with a Facsimile of the first Edition.* Dover, New York, 1954. Translated from the French and Latin by D. E. Smith and M. L. Latham.

R. Descartes. *Tutte le lettere. 1619-1650.* Bompiani, Milano, 2005. A cura di G. Belgioioso.

R. Descartes. *Œuvres complètes. III. Discours de la Méthode et Essais.* Gallimard, Paris, 2009a. Sous la direction de J.-M. Beyssade et D. Kamboucher.

R. Descartes. *Opere 1637 - 1649.* Bompiani, 2009b. A cura di G. Belgioioso.

R. Descartes. *Opere Postume. 1650-2009.* Bompiani, Milano, 2009c. A cura di G. Belgioioso.

D. Descotes. Aspects littéraires de la *Géométrie* de Descartes. *Archives intérnationales d'histoire des sciences*, 55:163–191, 2005.

Euclide. *Euclide. Tutte le Opere*. Bompiani, Milano, 2007. A cura di Fabio Acerbi.

P. Freguglia. *La geometria fra tradizione e innovazione*. Bollati Boringhieri, Torino, 1999.

M. Galuzzi. Newton's attempt to construct a unitary view of mathematics. *Historia Mathematica*, 37:535–562, 2010.

E. Giusti. La *Géométrie* di Descartes fra numeri e grandezze. In (Belgioioso et al., 1990), pages 419–439, 1990.

E. Giusti. Algebra and Geometry in Bombelli and Viète. *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, pages 303–328, 1992.

E. Giusti. *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Bollati Boringhieri, Torino, 1999.

N. Guicciardini. *Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method*. MIT Press, Cambridge, Mass., 2009.

G. Israel. The Analytical Method in Descartes' *Géométrie*. In *Otte and Panza (1997)*, 1997.

V. Jullien. *Philosophie naturelle et géométrie au XVII*^{e} *siècle*. Honoré Champion Éditeur, Paris, 2006.

G. Loria. Da Descartes e Fermat a Monge e Lagrange. Contributo alla storia della geometria analitica. *Reale Accademia dei Lincei. Atti. Memorie della classe di scienze matematiche fisiche e naturali (5)*, 14:777–485, 1923.

M. Otte and M. Panza, editors. *Analysis and Synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, Dordrecht, Boston, London, 1997. Kluwer.

Pappus. *La Collection mathématique, avec une Introduction et des notes par Paul Ver Eecke*. Nouveau tirage, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard, Paris, 1982.

D. Rabouin. *Mathesis Universalis. L'idée de mathématique universelle d'Aristote à Descartes.* PUF, Epiméthée, Paris, 2009.

R. Rashed. Les premières classifications des courbes. *Physis*, 42 (2):1–64, 2005a.

R. Rashed. La modernité mathématique : Descartes et Fermat. In (Rashed and Pellegrin, 2005), pages 239–252, 2005b.

R. Rashed and P. Pellegrin, editors. *Philophie des Mathématiques et théorie de la connaissance. L'Œuvre de Jules Vuillemin*, Paris, 2005. Blanchard.

C. Sasaki. *Descartes's mathematical Thought.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 2003.

F. van Schooten. De Concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraïco. In *(Descartes, 1659–61)*, 1661. 345-420.

M. Serfati. *La révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Petra, Paris, 2005.

F. Viète. *In artem analiticem Isagoge.* Apud Iametium Mettayer, Turoni, 1591.

J. Vuillemin. *Mathématiques et métaphysique chez Descartes.* PUF, Paris, 1960.